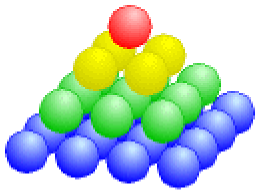
Übungen: Algebraische Gleichungen höheren Grades

Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge R!

1.
   a) $x^3 = 64$
   b) $x^3 = -125$
   c) $8x^3 - 27 = 0$
   d) $5x^3 + 2{,}56 = 0$
   e) $x^4 = 625$
   f) $x^4 = -16$
   g) $3x^4 + 243 = 0$
   h) $80x^4 - 5 = 0$
2.
   a) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$
   b) $x^3 + 9x^2 + 14x = 0$
   c) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
   d) $x^3 + 4x^2 + 6x = 0$
   e) $x^3 - 3x^2 = 0$
   f) $4x^3 + x^2 = 0$
   g) $2x^3 + 9x^2 - 5x = 0$
   h) $5x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
3.
   a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$
   b) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$
   c) $x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$
   d) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$
   e) $x^3 - 7x + 6 = 0$
   f) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
   g) $4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 0$
   h) $5x^3 - 12x^2 + 5x - 2 = 0$
4.
   a) $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$
   b) $x^3 + 2x = 2x^2 + 15$
   c) $x^3 + x^2 = 10x - 8$
   d) $3(x^3 + 1) = 7x(x + 1)$
   e) $x^2(x - 2) = (x - 3)(x + 2) + 1$
   f) $x(x - 4)^2 + x = 10$
   g) $x(x - 1)(x - 5) + 12 = 0$
   h) $(x + 2)(x - 3)(x - 5) = 24$
5.
   a) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
   b) $x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 = 0$
   c) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 13x - 10 = 0$
   d) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
   e) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 = 0$
   f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 18 = 0$
   g) $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$
   h) $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$
6.
   a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
   b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
   c) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
   d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
   e) $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$
   f) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$
   g) (*) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$
   h) (*) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Textaufgaben



7. Wenn man Kugeln zu einer quadratischen Pyramide aus n Schichten aufstapelt, braucht man $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Kugeln. Wie hoch ist eine Pyramide, die aus 30 Kugeln gebaut wurde?
8. Ein würfelförmiges Gefäß ist bis 1 dm unter den Rand mit Wasser gefüllt. Es enthält 100 l Wasser. Berechnen Sie die Seitenlänge.
9. Die Länge eines Schwimmbeckens ist um 3 m größer als die Breite, und die Breite ist um 3 m größer als die Tiefe. Das Volumen beträgt 80 m³. Berechnen Sie die Maße des Schwimmbeckens.
10. Die Länge eines Quaders ist ein Zwölftel der Höhe, die Breite ist zwei Drittel der Länge. Vergrößert man die Höhe um eine Elle, so beträgt das Volumen $1\,{}^{1}/_{6}$ Kubikellen. Berechnen Sie die Seitenlängen. (Tipp: Wählen Sie die Höhe als Unbekannte.) *(Nach einer babylonischen Aufgabe, ca. 1500 v. Chr.)*
11. Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen a = 10 dm und b = 8 dm soll eine quaderförmige Dose hergestellt werden, indem man an den Ecken Quadrate ausschneidet und die übriggebliebenen Rechtecke hochbiegt. Das Volumen der Dose soll 48 dm³ betragen. Wie groß muss die Seitenlänge der Quadrate sein? (2 Lösungen)
12. Ein quadratisches Prisma hat 900 dm³ Volumen. Die Summe von Basiskante und Höhe beträgt 19 dm. Berechnen Sie die Maße des Prismas. (2 Lösungen)
13. Einige Personen bilden eine Gesellschaft. Jeder legt zehnmal so viel Taler ein, als es Personen sind. Sie gewinnen je mit 100 Talern 6 Taler mehr als ihrer sind (d.h. sie gewinnen um 6 Prozent mehr, als es Personen sind). Nun stellt sich heraus, dass der Gewinn zusammen 392 Taler beträgt. Aus wie viel Personen bestand die Gesellschaft? *(L. Euler)*
14. Einige Kaufleute haben zusammen ein Kapitel von 8240 Rthlr. (Reichstaler), dazu legt jeder noch 40 mal so viel Rthlr., als der Kaufleute sind. Mit dieser ganzen Summe gewinnen sie so viel Prozent, als die Zahl der Kaufleute beträgt; hierauf teilen sie den Gewinn, und da zeigt es sich, dass, nachdem jeder 10 mal so viel Rthlr. genommen, als ihre Personenzahl beträgt, noch 224 Rthlr. übrig bleiben. Wie viel Kaufleute sind es gewesen? (3 Lösungen; *L. Euler*)
15. (*) Problem von *Archimedes*: Eine Kugel vom Radius r soll durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile geteilt werden, deren Volumina in einem gegebenen Verhältnis stehen.
    Zahlenbeispiel: $r = 3$, $V_1 : V_2 = 7 : 20$

    Anleitung:
    Volumen eines Kugelsegments der Höhe h: $V = \pi/3 \cdot (3rh^2 - h^3)$
    Ansatz: $(3rx^2 - x^3) : (3ry^2 - y^3) = 7 : 20$, $x + y = 2r$

    (Archimedes fand die allgemeine Lösung wahrscheinlich mit Hilfe von Kegelschnitten.)

Ergebnisse:

1.
   a) {4}
   b) {-5}
   c) {$^3/_2$}
   d) {-0,8}
   e) {±5}
   f) { }
   g) { }
   h) {±½}
2.
   a) {0, 2, 8}
   b) {-7, -2, 0}
   c) {0, $3^{(2)}$)}
   d) {0}
   e) {$0^{(2)}$, 3}
   f) {-1/4, $0^{(2)}$}
   g) {-5, 0, ½}
   h) {0}
3.
   a) {-2, 1, 4}
   b) {-1, 3, 5}
   c) {$-2^{(2)}$, 5}
   d) {-2}
   e) {-3, 1, 2}
   f) {-1, $2^{(2)}$}
   g) {-¼, $2^{(2)}$}
   h) {2}
4.
   a) {-2, 2, 3}
   b) {3}
   c) {-4, 1, 2}
   d) {-1, ⅓, 3}
   e) {-1}
   f) {1, 2, 5}
   g) {-1, 3, 4}
   h) {-1, 1, 6}
5.
   a) {1, 2, 3, 4}
   b) {-3, $2^{(2)}$, 3}
   c) {-1, 2}
   d) {$-2^{(2)}$, $1^{(2)}$}
   e) {-1, 1}
   f) {2, 3}
   g) {-4, -1, 2, 3}
   h) {-4, -2, -1, 2}
6.
   a) {±1, ±2}
   b) {±2, ±4}
   c) {±√2, ±√5}
   d) {±3}
   e) { }
   f) {±2}
   g) {1, 3}
   h) {-1, 2}
7. 4 Schichten
8. 5 dm
9. l = 8 m, b = 5 m, h = 2 m
10. h = 6, l = ½, b = ⅓
11. x_1 = 1 dm, x_2 = 2 dm
12. a = 10 dm, h = 9 dm oder
    a = 15 dm, h = 4 dm
13. 14
14. 7, 8, 10
15. x = 2, y = 4