

Übungen: Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge \mathbb{R} :

1.

- a) $3x^2 = 300$
- b) $5x^2 - 80 = 0$
- c) $3x^2 + 75 = 0$
- d) $4x^2 - 9 = 0$
- e) $50x^2 - 2 = 0$
- f) $6x^2 - 30 = 0$
- g) $2x^2 + 12 = 0$
- h) $8x^2 - 4 = 0$

2.

- a) $x^2 - 9x = 0$
- b) $5x^2 + 50x = 0$
- c) $7x^2 = 28x$
- d) $3x^2 = -33x$
- e) $18x - 3x^2 = 0$
- f) $12x^2 + 3x = 0$
- g) $15x^2 - 10x = 0$
- h) $24x^2 = 8x$

3.

- a) $x^2 + 10x + 24 = 0$
- b) $x^2 + 22x + 121 = 0$
- c) $x^2 + 2x + 8 = 0$
- d) $x^2 - 3x - 10 = 0$
- e) $x^2 - 14x + 49 = 0$
- f) $x^2 - 8x + 25 = 0$
- g) $x^2 - 4x + 1 = 0$
- h) $x^2 + 5x + 3 = 0$

7. Geben Sie eine quadratische Gleichung mit (möglichst kleinen) ganzzahligen Koeffizienten an, die folgende Lösungsmenge hat:

- a) $\{3, 7\}$
- b) $\{-2, 10\}$
- c) $\{-6, 4\}$
- d) $\{-1, -5\}$
- e) $\{2/3, 3\}$
- f) $\{1/4, 4\}$
- g) $\{3/4, 4/3\}$
- h) $\{-5/6, 2/5\}$

4.

- a) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
- b) $5x^2 - 8x + 2 = 0$
- c) $6x^2 + 13x + 6 = 0$
- d) $4x^2 + x + 10 = 0$
- e) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
- f) $5x^2 - 36x + 55 = 0$
- g) $6x^2 - 5x - 6 = 0$
- h) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

5.

- a) $x^2 + 3x = 40$
- b) $x^2 + 6 = 7x$
- c) $x^2 = x + 12$
- d) $x^2 = 8x - 15$
- e) $9x^2 + 1 = 6x$
- f) $2x + 8 = 3x^2$
- g) $13x^2 - 5x = 6 - 12x^2$
- h) $5x^2 + 9 = 2x^2 + 4x$

6.

- a) $(x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = (x + 1)^2 + 97$
- b) $(5x + 2)(x - 3) - (2x + 3)(x - 2) = 0$
- c) $(2x - 1)(x + 1) - (x - 3)(x + 5) = 20$
- d) $3(x - 2)(x + 5) - 2(x + 9)(x - 1) = -18$
- e) $(4x - 1)^2 - (3x + 2)^2 = 6(x - 3)^2$
- f) $(5x - 3)^2 - (3x + 1)^2 = 15(x - 2)^2$
- g) $(x + 5)(x - 3) + x(x - 2) = (x - 4)^2$
- h) $(4x + 1)^2 - (2x - 3)(3x + 2) = 0$

8. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren, wobei nur ganze Zahlen vorkommen sollen:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $x^2 - 6x + 8$ | e) $2x^2 + x - 15$ |
| b) $x^2 + 8x + 15$ | f) $3x^2 - 10x + 8$ |
| c) $x^2 + 2x - 120$ | g) $6x^2 + 5x + 1$ |
| d) $x^2 - x - 30$ | h) $9x^2 - 18x + 8$ |

Textaufgaben

9. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 10, ihr Produkt ist 24. Wie lauten die Zahlen?
10. Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist 3, ihr Produkt ist 40.
11. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 12, die Summe ihrer Quadrate ist 80.
12. Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist 1, die Summe ihrer Quadrate ist 85.
13. Zwei Quadrate haben zusammen den Flächeninhalt 100. Die Seite des zweiten Quadrats ist $\frac{3}{4}$ der Seite des ersten. Berechnen Sie die Seitenlängen! (*Ägypten*)
14. Wenn man ein Dreieck aus Steinchen legt, wobei jede Reihe ein Steinchen mehr als die vorige enthält, braucht man für n Reihen $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Steinchen. Wie viele Reihen hat ein Dreieck aus 36 Steinchen?
15. Wenn bei einem Turnier mit n Teilnehmern jeder gegen jeden spielt, gibt es $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Spiele. Bei einem Schachturnier wurden 45 Partien gespielt. Wie viele Spieler nahmen teil?
16. Ein n -Eck hat $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen. Wie viele Ecken hat ein Vieleck mit 54 Diagonalen?
17. Ein Rechteck hat 320 cm^2 Flächeninhalt. Die Länge ist um 4 cm länger als die Breite. Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks!
18. Ein Rechteck hat 140 cm^2 Flächeninhalt. Die Länge ist um 1 cm kürzer als das Dreifache der Breite. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?
19. Ein Rechteck hat 70 cm Umfang und 300 cm^2 Flächeninhalt. Berechnen Sie die Seitenlängen!
20. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 68 cm, die Diagonale ist 26 cm lang. Berechnen Sie die Seitenlängen!
21. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete um 4 cm länger als die andere. Die Hypotenuse ist 20 cm lang. Berechnen Sie die Seitenlängen!
22. Wenn man die eine Seite eines Quadrates um 5 cm verlängert und die andere Seite um 5 cm verkürzt, so erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 600 cm^2 . Berechnen Sie die Länge der Quadratseite!
23. Der 8. Teil einer Herde Affen, quadriert, sprang in einem Wald herum, die 12 übrigen waren auf einem Hügel zu sehen. Wieviel waren es im ganzen? (*Indien*)
24. Der 5. Teil einer Affenherde minus 3, quadriert, ging in eine Höhle, nur ein Affe war noch zu sehen. Wie viele Affen waren es? (*Indien*)
25. Einige Gesellen haben zusammen 10 Gulden. Nun legt ein jeder so viele Gulden dazu, wie es Gesellen sind. Als sie das Geld unter sich aufteilen, bekommt jeder 11 Gulden. Wie viele Gesellen sind es gewesen? (*nach Abraham Ries*)

26. Suche eine (positive) Zahl, die so beschaffen ist, dass, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multipliziere und zum Produkt die Hälfte der gedachten Zahl addiere, 30 herauskommt. (*Leonhard Euler*)

27. Die Flaggen der skandinavischen Länder zeigen ein Kreuz. Wie breit muss bei einer Flagge der Länge $a = 120$ cm und der Breite $b = 80$ cm das Kreuz sein, wenn es den halben Flächeninhalt der Fahne einnehmen soll?



(Tipp: Wenn das Kreuz die Breite x hat, ergeben die restlichen Flächen zusammen ein Rechteck mit den Seitenlängen $a - x$ und $b - x$.)

28. Die Faustregel für die Bestimmung des Anhalteweges beim Autofahren lautet:

$$a = \frac{3v}{10} + \left(\frac{v}{10}\right)^2 \quad (v: \text{Geschwindigkeit in km/h}).$$

Wie schnell darf man höchstens fahren, wenn der Anhalteweg 80 m betragen darf?

Ergebnisse:

1.

- a) $\{-10, 10\}$
- b) $\{-4, 4\}$
- c) $\{\}$
- d) $\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$
- e) $\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$
- f) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
- g) $\{\}$
- h) $\{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$

2.

- a) $\{0, 9\}$
- b) $\{-10, 0\}$
- c) $\{0, 4\}$
- d) $\{-11, 0\}$
- e) $\{0, 6\}$
- f) $\{-\frac{1}{4}, 0\}$
- g) $\{0, \frac{2}{3}\}$
- h) $\{0, \frac{1}{3}\}$

3.

- a) $\{-6, -4\}$
- b) $\{-11^{(2)}\}$
- c) $\{\}$
- d) $\{-2, 5\}$
- e) $\{7^{(2)}\}$
- f) $\{\}$
- g) $\{0,268; 3,732\}$
- h) $\{-4,303; -0,697\}$

4.

- a) $\{\frac{1}{3}, 3\}$
- b) $\{0,301; 1,290\}$
- c) $\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\}$
- d) $\{\}$
- e) $\{-\frac{5}{2}, 1\}$
- f) $\{\frac{11}{5}, 5\}$
- g) $\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$
- h) $\{\frac{3}{2}^{(2)}\}$

5.

- a) $\{-8, 5\}$
- b) $\{1, 6\}$
- c) $\{-3, 4\}$
- d) $\{3, 5\}$
- e) $\{1/3^{(2)}\}$
- f) $\{-4/3, 2\}$
- g) $\{-0,4; 0,6\}$
- h) $\{ \}$

6.

- a) $\{-4, 4\}$
- b) $\{0, 4\}$
- c) $\{-2, 3\}$
- d) $\{1, 6\}$
- e) $\{-19, 3\}$
- f) $\{-26, 2\}$
- g) $\{-10,856; 2,856\}$
- h) $\{ \}$

7.

- a) $x^2 - 10x + 21 = 0$
- b) $x^2 - 8x - 20 = 0$
- c) $x^2 + 2x - 24 = 0$
- d) $x^2 + 6x + 5 = 0$
- e) $3x^2 - 11x + 6 = 0$
- f) $4x^2 - 17x + 4 = 0$
- g) $12x^2 - 25x + 12 = 0$
- h) $30x^2 + 13x - 10 = 0$

8.

- a) $(x - 2)(x - 4)$
- b) $(x + 3)(x + 5)$
- c) $(x - 10)(x + 12)$
- d) $(x + 5)(x - 6)$
- e) $(2x - 5)(x + 3)$
- f) $(3x - 4)(x - 2)$
- g) $(2x + 1)(3x + 1)$
- h) $(3x - 2)(3x - 4)$

- 9. 6, 4
- 10. 8, 5
- 11. 8, 4
- 12. 7, 6
- 13. 8, 6
- 14. 8
- 15. 10
- 16. 12
- 17. 20 cm, 16 cm
- 18. 20 cm, 7 cm
- 19. 20 cm, 15 cm
- 20. 24 cm, 10 cm
- 21. 12 cm, 16 cm, 20 cm
- 22. 25 cm
- 23. 16 bzw. 48
- 24. 50 (bzw. 5)
- 25. 10 Gesellen
- 26. 12
- 27. 27,9 cm
- 28. 75,7 km/h