Übungen: Trigonometrie

Polarkoordinaten

1. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der Punkte A(5; 45°), B(6; 120°), C(3,5; 310°), D(4,8; 235°); E(2,7; 0°), F(3,3; 90°), G(10; 53,13°), H(3,16; 161,57°).
2. Berechnen Sie die Polarkoordinaten von P(2/1), Q(1,5/-2), R(6/0), S(-3/0), T(-4/3), U(-2,5/-2,5), V(0/3,3), W(-4,33/2,5).

Rechtwinkelige Dreiecke

3. Ein Papierdrache fliegt an einer 80 m langen Schnur, die mit dem Boden einen Winkel von 67° einschließt. Wie hoch fliegt der Drache?
4. Eine 5 m lange Leiter lehnt an einer Wand. Sie ist unter 75° zum Boden geneigt. Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?
5. Die Spitze eines 200 m entfernten Turmes wird unter dem Höhenwinkel 22° gesehen. Wie hoch ist der Turm?
6. Wie hoch ist ein Baum, der bei einem Sonnenstand von 52° einen 6,3 m langen Schatten wirft?
7. Der Stephansturm ist 137 m hoch. Berechnen Sie, um wieviel sein Schatten am 21. Dezember länger ist als am 21. Juni!

   (Geographische Breite $\varepsilon = 48{,}2°$
   Sonnenstand am 21. 12.: $90° - \varepsilon - 23{,}5°$
   Sonnenstand am 21. 6.: $90° - \varepsilon + 23{,}5°$)
8. Ein Förderband reicht über eine horizontale Entfernung von 4 m und steigt in einem Winkel von 30° an. Wie lang ist das Band?
9. Die Sommerrodelbahn in Abtenau (Salzburg) hat im Durchschnitt 11,65° Gefälle. Der Höhenunterschied beträgt 400 m. Wie lang ist die Rodelstrecke?
10. Wie hoch steht die Sonne, wenn ein 5 m hoher Fahnenmast einen 7,5 m langen Schatten wirft?
11. Eine vom Einsturz bedrohte Mauer wird mit 7 m langen Pfosten abgestützt, die 4 m von der Mauer entfernt im Boden verankert werden. Unter welchem Winkel sind die Pfosten zum Boden geneigt?
12. Die Schafbergbahn überwindet auf einer Länge von 5,8 km den Höhenunterschied zwischen St. Wolfgang (542 m) und Schafbergspitze (1732 m). Berechnen Sie den durchschnittlichen Anstiegswinkel!

13. Berechnen Sie bei den folgenden rechtwinkeligen Dreiecken die fehlenden Angaben:

	a	b	c	α	β
a)	3		5		
b)	7,5			45°	
c)			7,49	25,64°	
d)			19,88		39,69°
e)		6,18	10,48		
f)	25,41				53,15°
g)		17,86		77,13°	
h)	20	21			
i)			8,98	15,04°	
j)		63,04			56,78°
k)		225,00	290,15		
l)	365			51,44°	
m)	77,11		93,11		
n)		83,8			19,50°
o)		34,50		59,14°	
p)		7,61	20,82		
q)			100,28		76,08°
r)	55,23				46,26°
s)	1,37	5,08			
t)	14,17		15,15		

14. Welchen Winkel schließt die Raumdiagonale eines Würfels
   a) mit einer Seitenkante
   b) mit einer Seitenfläche
   c) mit einer anderen Raumdiagonalen ein?
15. Die Cheopspyramide ist eine quadratische Pyramide. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt a = 230 m und die Höhe h = 147 m. Unter welchem Winkel sind
   a) die Seitenflächen
   b) die Seitenkanten zum Boden geneigt?
   c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
16. Ein Drehkegel hat einen Radius von 4,5 cm; der Öffnungswinkel (der Winkel an der Spitze) beträgt 52°. Berechnen Sie die Höhe und das Volumen des Kegels.

Allgemeine Dreiecke

17. Ergänzen Sie die folgende Tabelle:

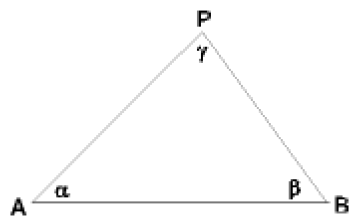
	a	b	c	α	β	γ
a)	7,5			45,76°	110,58°	
b)		8,22		39,07°		83,96°
c)	15,83	12,41		75,59°		
d)	3,74	4,18			31,72°	
e)		11,24	6,03	15,62°		
f)	13	14	15			
g)		25,35		56,85°	77,75°	
h)	32,91	36,68				76,47°
i)	13,6		24,35	30,28°		
j)	8,62			28,96°		105,21°
k)	14,1		23,5		53,13°	
l)		65,36			44,63°	85,44°
m)		35,87	30,26		69,54°	
n)	47,68	25,35	27,11			
o)		4,42	7,04		30,30°	
p)	17,27	14,98	10,75			
q)	11,68	18,31				26,00°
r)	48,29	36,48	20,23			
s)	29,26			59,93°		86,86°
t)	6,5		7,21		50,00°	

Flächenberechnungen

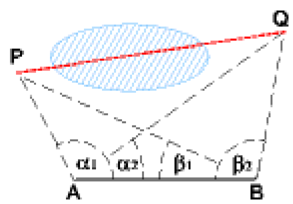
18. Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt der folgenden viereckigen Grundstücke:
    a) AB = 85 m, BC = 75 m, AD = 65 m, ∠ DAB = 67,38°, ∠ ABC = 73,74°
    b) AB = 90 m, BC = 54 m, CD = 73 m, ∠ ABC = 105°, ∠ BCD = 98°
    c) AB = 80 m, BC = 56 m, CD = 24 m, DA = 40 m, ∠ DAB = 65°
    d) AB = 300 m, BC = 123 m, CD = 190 m, DA = 235 m, ∠ ABC = 113°
    e) AB = 56 m, AD = 97 m, ∠ DAB = 104°, ∠ ABC = 121°, ∠ ADC = 81°
19. Ein Grundstück hat die Form eines Trapezes mit den beiden Parallelseiten a = 320 m und c = 210 m. Die Winkel an der größeren Parallelseite sind 78,3° und 68,4°. Wie groß sind der Umfang und der Flächeninhalt des Grundstücks? (Tipp: Wenn man durch C eine Parallele zur Seite d zieht, erhält man ein Dreieck mit den Seitenlängen a - c, b und d.)

20. Von einem viereckigen Grundstück sind folgende Maße bekannt: AB = 112 m, BC = 48 m, AD = 75 m, ∠ DAB = 67°, ∠ ABC = 102°.
   a) Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Grundstücks.
   b) Das Grundstück soll in ein flächengleiches Parallelogramm umgewandelt werden, wobei die Seite AB und der Winkel α erhalten bleiben. Wie lang muss die andere Seite des Parallelogramms sein? (Flächeninhalt des Parallelogramms: A = a·b·sin α)
21. Von einem viereckigen Grundstück ABCD weiß man: AB = 633 m, BC = 615 m, AD = 150 m, ∠ DAB = 90°, ∠ ABC = 115,6°.
   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks.
   b) Eine durch A gehende Strecke AX soll das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilen. Bestimmen Sie, ob der Punkt X auf BC oder CD liegt. Wie weit ist er von C entfernt?

Vermessungsaufgaben

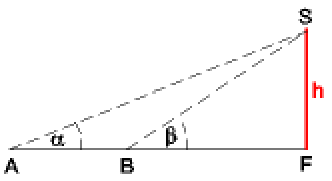


Bsp. 22

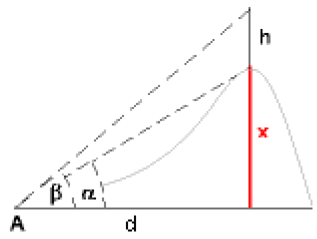


Bsp. 23

22. Um einen Neupunkt P zu vermessen, steckt man eine Standlinie AB ab und misst zwei der Horizontalwinkel ∠ BAP = α, ∠ ABP = β und ∠ APB = γ. Wie weit ist der Punkt P von A bzw. B entfernt?
   a) AB = 56 m, α = 67,5°, β = 54,2°
   b) AB = 92 m, α = 42,9°, β = 113,4°
   c) AB = 135 m, α = 36,9°, γ = 95,3°
   d) AB = 64 m, β = 81,4°, γ = 21,3°
23. Um die nicht direkt messbare Entfernung zweier Punkte P und Q in der Ebene zu bestimmen, steckt man eine Standlinie AB ab und misst folgende Horizontalwinkel: ∠ BAP = α_1, ∠BAQ = α_2, ∠ ABP = β_1, ∠ ABQ = β_2 Wie lang ist die Strecke PQ?
   a) AB = 250 m, α_1 = 102,5°, α_2 = 21,6°, β_1 = 37,8°, β_2 = 122,3°
   b) AB = 250 m, α_1 = 75,2°, α_2 = 37,9°, β_1 = 32,5°, β_2 = 106,3°
   c) AB = 400 m, α_1 = 87,2°, α_2 = 63,4°, β_1 = 52,1°, β_2 = 79,9°
   (Diese Aufgabe bezeichnet man auch als „Vorwärtseinschneiden".)

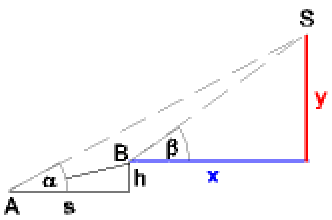


Bsp. 24

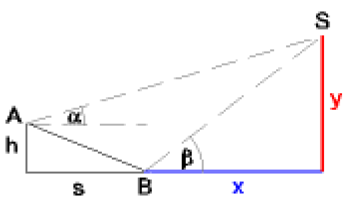


Bsp. 25

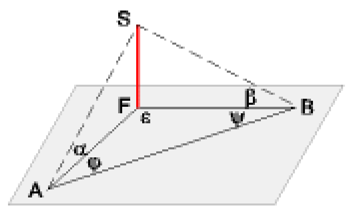
24. Ein alter Turm steht in einer Ebene. Um seine Höhe zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine horizontale Standlinie AB ab, so dass A, B und der Fußpunkt des Turms in einer Linie liegen. Von A aus misst man zur Turmspitze den Höhenwinkel α, von B aus den Höhenwinkel β. Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist sein Fußpunkt von B entfernt?
    a) AB = 100 m, α = 15,8°, β = 38,1°
    b) AB = 80 m, α = 16,9°, β = 25,3°
    c) AB = 120 m, α = 11,8°, β = 18,6°
25. Auf einem Berggipfel steht ein h m hoher Sendemast. Von einem Ort A im Tal sieht man den Fußpunkt des Mastes unter dem Höhenwinkel α , die Spitze unter dem Höhenwinkel β. Wie hoch ist der Berg? Berechnen Sie auch die horizontale Distanz d zwischen A und dem Berggipfel.
    a) h = 75 m, α = 17,7°, β = 24,3°
    b) h = 50 m, α = 41,6°, β = 47,3°
    c) h = 40 m, α = 31,0°, β = 34,2°



Bsp. 26



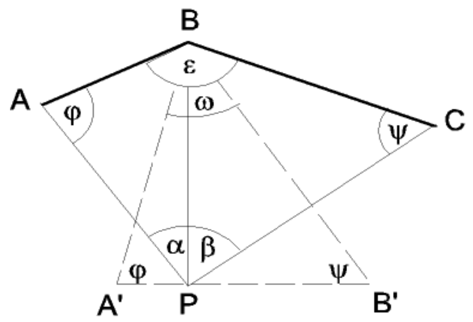
Bsp. 27



Bsp. 28 und 29

26. Ein Kirchturm wird von zwei Punkten A und B aus vermessen. B liegt zwischen A und dem Turm, aber um h Meter höher als A. Man misst die *horizontale* Distanz s von A und B sowie die Höhenwinkel α und β zur Turmspitze. Berechnen Sie den Höhenunterschied und die horizontale Entfernung zwischen B und der Turmspitze.
    a) s = 80 m, h = 4,7 m, α = 11,4°, β = 16,3°
    b) s = 114,3 m, h = 8,5 m, α = 10,2°, β = 19,7°
    c) s = 55 m, h = 2 m, α = 16,5°, β = 23,9°
27. Wie Beispiel 26, aber b liegt um h Meter tiefer als A:
    a) s = 75 m, h = 3,5 m, α = 7,8°, β = 13,3°
    b) s = 62,5 m, h = 1,8 m, α = 14,0°, β = 31,7°
    c) s = 240 m, h = 12 m, α = 7,7°, β = 12,1°

28. Ein Mast steht auf einer waagrechten Ebene. In der Ebene wird eine Standlinie AB abgesteckt, die mit dem Fußpunkt F des Mastes ein Dreieck bildet. Man misst die Horizontalwinkel ∠ BAF = φ, ∠ ABF = ψ und den Höhenwinkel α von A zur Mastspitze. Wie hoch ist der Mast?
   a) AB = 50 m, φ = 62,2°, ψ = 47,0°, α = 37,5°
   b) AB = 80 m, φ = 72,8°, ψ = 38,4°, α = 28,3°
   c) AB = 60 m, φ = 105,3°, ψ = 41,6°, α = 23,7°
29. Von der Spitze eines h m hohen Turmes sieht man den Geländepunkt A unter dem Tiefenwinkel α, und nach Schwenken des Messgeräts um den Horizontalwinkel ε den Geländepunkt B unter dem Tiefenwinkel β. Berechnen Sie die Entfernung AB.
   a) h = 63,5 m, α = 24,2°, β = 29,9°, ε = 76,4°
   b) h = 46,5 m, α = 27,5°, β = 34,8°, ε = 112,2°
   c) h = 55 m, α = 14,0°, β = 12,7°, ε = 51,6°
30. (*) Aus einer Karte kennt man die gegenseitige Lage der Punkte A, B und C: AB = 1300 m, BC = 2500 m, ε = ∠ ABC = 142°. Von einem Schiff aus, dass sich im Punkt P befindet, misst man die Horizontalwinkel α = ∠ APB = 38°, β = ∠ BPC = 54°. Wie weit ist das Schiff von den Punkten A, B und C entfernt?
   (Diese Aufgabe ist auch als „Rückwärtseinschneiden" bekannt.)



Anleitung: Berechnen Sie zuerst das Hilfsdreieck A'B'C: die Seite A'B' steht normal auf PB, die Winkel bei A' und B' sind φ = ∠ PAB und ψ = ∠ PCB. Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, ist φ + ψ = 360° - (α + β + ε) und ω = 180° - (φ + ψ) = α + β + ε – 180°. Die Seitenlängen sind $A'B = \frac{PB}{\sin\varphi} = \frac{AB}{\sin\alpha}$ (Sinussatz im Dreieck ABP) und $C'B = \frac{PB}{\sin\psi} = \frac{BC}{\sin\beta}$ (Sinussatz im Dreieck BCP). Wenn Sie φ und ψ kennen, können Sie auch die anderen Dreiecke berechnen.

Weitere Anwendungen

31. Die Erde ist ca. 150 Mill. km von der Sonne entfernt, der Mars 228 Mill. km. An einem bestimmten Tag beträgt der Winkelabstand zwischen Sonne und Mars, von der Erde aus gesehen, 50°. Unter welchem Winkel sieht man die Entfernung Sonne – Erde vom Mars aus? Wie weit ist der Mars von der Erde entfernt, und welchen Winkel schließen die Verbindungslinien Sonne – Erde und Sonne – Mars miteinander ein?
32. Die Entfernung der Venus von der Sonne beträgt ca. 108 Mill. km. Rechnen Sie wie im vorigen Beispiel, wenn der Winkelabstand zwischen Sonne und Venus, von der Erde aus gesehen, 30° beträgt (2 Lösungen!). Wie groß kann der Winkelabstand Sonne – Venus höchstens sein?
33. An einem Maschinenteil greifen zwei Kräfte F_1 und F_2 an, von denen Betrag und Richtungswinkel gegeben sind. Berechnen Sie Betrag und Richtungswinkel der resultierenden Kraft.
    a) $F_1 = 80$ N, $\alpha_1 = 0°$; $F_2 = 50$ N, $\alpha_2 = 120°$
    b) $F_1 = 50$ N, $\alpha_1 = 15°$; $F_2 = 100$ N, $\alpha_2 = 90°$
    c) $F_1 = 90$ N, $\alpha_1 = 23°$; $F_2 = 40$ N, $\alpha_2 = 108°$
34. Wie ändert sich das Ergebnis von Bsp. 33a, wenn (a) F_1 verdoppelt wird, (b) F_2 verdoppelt wird, (c) beide Kräfte verdoppelt werden?
35. Eine Kraft von 100 N, die in Richtung der positiven y-Achse wirkt, soll in zwei Teilkräfte mit den Richtungswinkeln 45° und 120° zerlegt werden. Wie groß sind die Teilkräfte?
36. Eine 20 kg schwere Verkehrsampel (Gewichtskraft 200 N) hängt an zwei Drähten, die mit der Horizontalen einen Winkel von 11° einschließen. Welche Kraft wirkt auf die Drähte?
37. Ein Ruderer will einen Fluss überqueren, der mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h nach Süden fließt. Das Boot erreicht eine Eigengeschwindigkeit von 10 km/h.
    a) In welchem Winkel wird das Boot abgetrieben, wenn es einen Kurs normal zum Flussufer steuert? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt es sich?
    b) Welchen Winkel zur Normalen muss der Ruderer einschlagen, wenn er genau gegenüber von seinem Startpunkt landen will? Wie groß ist dann seine Geschwindigkeit?
38. Ein Sportflugzeug fliegt mit einer Eigengeschwindlgkeit von 200 km/h nach Osten. Der Wind weht mit 50 km/h aus Südosten.
    a) In welchem Winkel wird das Flugzeug abgetrieben, wenn der Pilot direkt nach Osten steuert? Wie hoch ist seine Geschwindigkeit über Grund?
    b) Welchen Winkel zur Ostrichtung muss der Pilot steuern, wenn er genau nach Osten fliegen will? Mit welcher Geschwindigkeit ist er dann unterwegs?

(Die Beispiele 33 bis 38 können auch mit Vektoren gerechnet werden.)

Ergebnisse:

1. A(3,54/3,54), B(-3/5,20), C(2,25/-2,68), D(-2,75/-3,93), E(2,7/0), F(0/3,5), G(6/8), H(-3/1)
2. P(2,24; 26,57°), Q(2,5; -53,13°) bzw. Q(2,5; 306,87°), R(6; 0°), S(3; 180°), T(5; 143,13°), U(3,54; 215°), V(3,3; 90°), W(5; 150°)
3. 73,6 m
4. 1,3 m
5. 80,8 m
6. 8 m
7. 351,2 m
8. 4,6 m
9. ca. 1980 m
10. 33,7°
11. 55,15°
12. 11,8°
13.

	a	b	c	α	β
a)	3	4	5	36,87°	53,13°
b)	7,5	7,5	10,61	45°	45°
c)	3,24	6,75	7,49	25,64°	64,36°
d)	15,3	12,7	19,88	50,31°	39,69°
e)	8,46	6,18	10,48	53,85°	36,15°
f)	25,41	33,9	42,37	36,85°	53,15°
g)	78,2	17,86	80,21	77,13°	12,87°
h)	20	21	29	43,60°	46,40°
i)	2,33	8,67	8,98	15,04°	74,96°
j)	41,28	63,04	75,35	33,22°	56,78°
k)	183,20	225,00	290,15	39,15°	50,68°
l)	365	291	466,8	51,44°	38,56°
m)	77,11	52,19	93,11	55,91°	34,09°
n)	236,7	83,8	251,1	70,50°	19,50°
o)	57,74	34,50	67,26	59,14°	30,88°
p)	19,38	7,61	20,82	68,56°	21,44°
q)	24,13	97,33	100,28	13,92°	76,08°
r)	55,23	57,71	79,88	43,74°	46,26°
s)	1,37	5,08	5,26	15,09°	74,91°
t)	14,17	5,35	15,15	69,32°	20,68°

14. a) 54,74° b) 35,26° c) 70,53°
15. a) 51,96° b) 42,11° c) 2592100 m³
16. h = 9,22 cm, V = 196 cm³

17.

	a	b	c	α	β	γ
a)	7,5	9,8	4,2	45,76°	110,58°	23,66°
b)	6,18	8,22	9,75	39,07°	56,97°	83,96°
c)	15,83	12,41	13,39	75,59°	49,40°	55,01°
d)	3,74	4,18	6,87	28,06°	31,72°	120,22°
e)	5,67	11,24	6,03	15,62°	147,74°	16,64°
f)	13	14	15	53,13°	59,49°	67,38°
g)	21,72	25,35	18,47	56,85°	77,75°	45,40°
h)	32,91	36,68	43,17	47,83°	55,70°	76,47°
i)	13,6	26,88 15,18	24,35	30,28°	85,19° 34,25°	64,53° 115,47°
j)	8,62	12,77	17,18	28,96°	45,83°	105,21°
k)	14,1	18,8	23,5	36,87°	53,13°	90°
l)	71,19	65,36	92,74	49,93°	44,63°	85,44°
m)	32,55	35,87	30,26	58,23°	69,54°	52,22°
n)	47,68	25,35	27,11	130,67°	23,78°	25,55°
o)	8,71 3,45	4,42	7,04	96,23° 23,17°	30,30°	53,47° 126,53°
p)	17,27	14,98	10,75	82,56°	59,33°	38,11°
q)	11,68	18,31	9,34	33,24°	120,76°	26,00°
r)	48,29	36,48	20,23	113,64°	43,79°	22,57°
s)	29,26	18,52	33,76	59,93°	33,21°	86,86°
t)	6,5	5,83	7,21	58,66°	50,00°	71,34°

18.

a) u = 266 m, A = 4080 m²

b) u = 306 m, A = 5583 m²

c) u = 200 m, A = 1990 m²

d) u = 848 m, A = 36600 m²

e) u = 422 m, A = 9890 m²

19. u = 913 m, A = 48340 m²

20. a) u = 330 m, A = 6152 m² b) 59,7 m

21. a) A = 242944 m² b) auf BC; CX = 189,4 m

22. a) AP = 53,4 m, BP = 60,8 m b) AP = 210,1 m, BP = 155,8 m

c) AP = 100,4 m, BP = 81,4 m d) AP = 174,2 m, BP = 171,9 m

23. a) 398,7 m b) 310,0 m c) 291,3 m

24. a) $h = 44{,}3$ m, BF = 56,5 m b) $h = 68{,}0$ m, BF = 143,9 m c) $h = 66{,}1$ m, BF = 196,4 m
25. a) $x = 180{,}8$ m, $d = 566{,}6$ m b) $x = 226{,}7$ m, $d = 255{,}3$ m c) $x = 305{,}2$ m, $d = 508{,}0$ m
26. a) $x = 125{,}9$ m, $y = 36{,}8$ m b) $x = 67{,}7$ m, $y = 24{,}3$ m c) $x = 97{,}3$ m, $y = 43{,}1$ m
27. a) $x = 138{,}6$ m, $y = 32{,}8$ m b) $x = 47{,}2$ m, $y = 28{,}2$ m c) $x = 561{,}4$ m, $y = 120{,}4$ m
28. a) 29,7 m b) 28,7 m c) 32,0 m
29. a) 157,5 m b) 130,3 m c) 203,3 m
30. PA = 2333 m, PB = 2380 m, PC = 2801 m
31. 30,26°, 293 Mill. km, 99,74°
32. 1. Lösung: 44°, 208 Mill. km, 106°
    2. Lösung: 136°, 52 Mill. km, 14°
    größter Winkelabstand: 46°
33. a) 70 N, 38,2° b) 122,8 N, 66,8° c) 101,6 N, 46,1°
34. a) 141,8 N, 17,8° b) 91,7 N, 70,9° c) 140 N, 38,2°
35. je 524 N
36. $F_1 = 51{,}8$ N, $F_2 = 73{,}2$ N
37. a) 16,7°, 10,4 km/h b) 17,5°, 9,5 km/h
38. a) 12,1°, 168,4 km/h b) 10,2° Richtung Süden, 161,5 km/h