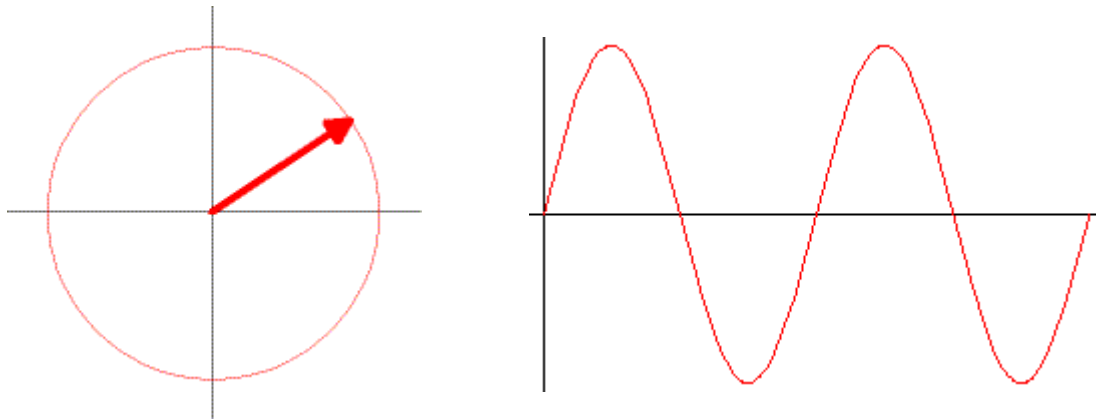


## Eine Anwendung der komplexen Zahlen: Komplexe Wechselstromrechnung

Harmonische Schwingungen wie z.B. Wechselstrom lassen sich durch einen rotierenden Zeiger in der komplexen Zahlenebene veranschaulichen. Den wirklichen Wert (Spannung, Stromstärke) erhält man dann, indem man nur die Auf- und Ab-Bewegung betrachtet, also den Imaginärteil. (Man kann sich genauso gut für den Realteil entscheiden.) Meist gibt man die Kreisfrequenz  $\omega$  an, das ist das  $2\pi$ -fache der Frequenz (Anzahl der Schwingungen bzw. Umdrehungen pro Sekunde). Auf den folgenden Abbildungen ist jeweils links das Zeigerdiagramm in der komplexen Ebene, rechts der zeitliche Ablauf dargestellt.



Bei Gleichstrom gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U} = R \cdot I$$

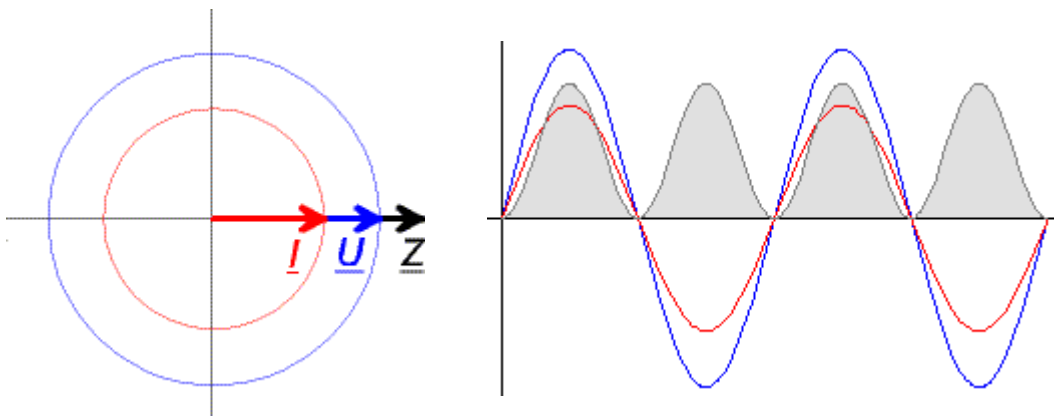
( $U$ : Spannung,  $R$ : Widerstand,  $I$ : Stromstärke). Bei Wechselstrom können auch noch Phasenverschiebungen auftreten. Man betrachtet daher alle vorkommenden Größen als komplexe Zahlen und schreibt

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot I$$

$\underline{Z}$  ist der komplexe Widerstand, auch "Impedanz" genannt.) Komplexe Größen werden durch unterstrichene Buchstaben dargestellt.) Die imaginäre Einheit wird mit  $j$  bezeichnet, damit man sie nicht mit der Stromstärke verwechselt.

### Ohmscher Widerstand (z.B. Glühlampe):

Strom und Spannung sind in Gleichphase. Der Widerstand  $\underline{Z}$  ist gleich dem normalen Ohmschen Widerstand  $R$ , also eine reelle Zahl.

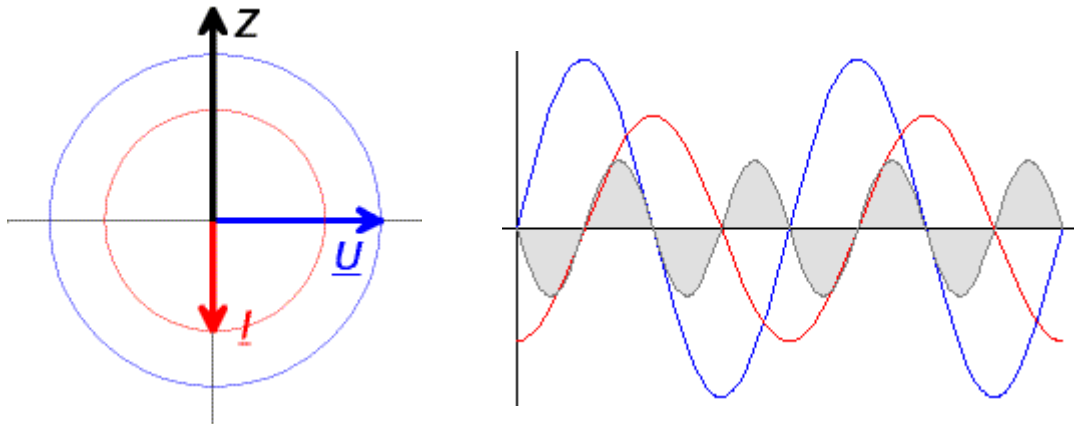


(blau: Spannung, rot: Stromstärke, grau: Leistung  $P = U \cdot I$ )

### Induktivität (Spule):

Bei einer Spule tritt der induktive Widerstand  $\omega L$  auf ( $\omega$ : Kreisfrequenz des Stroms,  $L$ : Induktivität der Spule). Die Spannung läuft dem Strom um  $\frac{1}{4}$  Periode voraus. Das entspricht im Zeigerdiagramm einer Drehung um  $90^\circ$ , also einer Multiplikation mit  $j$ :

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

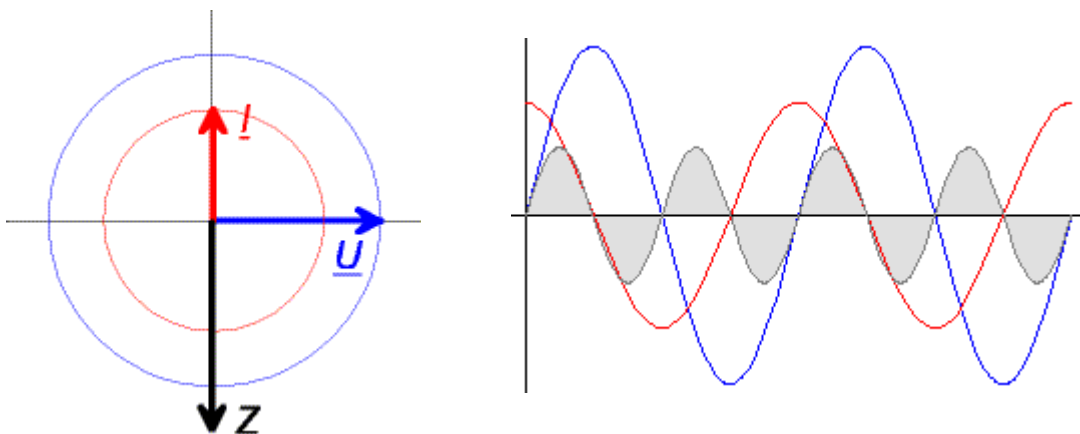


Die Leistung ist 0, weil sich die positiven und negativen Anteile (Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse) gegenseitig aufheben. Man spricht daher von einem *Blindwiderstand*.

### Kapazität (Kondensator):

Ein Kondensator hat den kapazitiven Widerstand  $1/\omega C$  ( $\omega$ : Kreisfrequenz,  $C$ : Kapazität). Die Spannung läuft den Strom um  $\frac{1}{4}$  Periode nach. Das entspricht im Zeigerdiagramm einer Drehung um  $-90^\circ$ , also einer Multiplikation mit  $-j$ :

$$\underline{Z}_C = -j/\omega C$$



Auch hier ist die Leistung 0.

Wenn in einem Stromkreis mehrere Widerstände vorhanden sind, gilt (ganz analog zu den Formeln für Gleichstrom) bei Serienschaltung

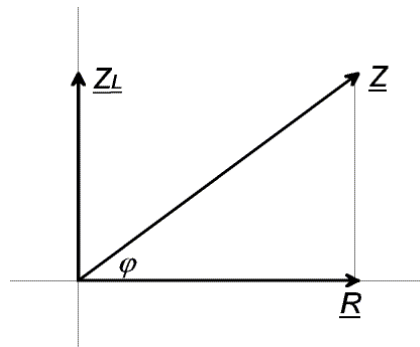
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

und bei Parallelschaltung

$$1/\underline{Z} = 1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2$$

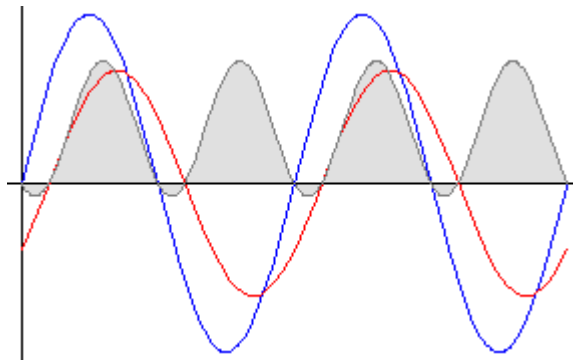
## Rechenbeispiel:

Ein Ohmscher Widerstand mit  $R = 200 \Omega$  und eine Spule mit  $\omega L = 150 \Omega$  werden in Serie geschaltet. Es ist dann  $\underline{Z} = 200 + 150j$ :



(Die Zeiger für Spannung und Stromstärke wurden der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet.)

Für den Betrag des Widerstands (*Scheinwiderstand* = Länge des Pfeils) erhalten wir  $|\underline{Z}| = \sqrt{(200^2 + 150^2)} = 250 \Omega$ , der Winkel  $\varphi$  (*Phasenverschiebung*) beträgt  $\sim 37^\circ$ . Bei einer Spannung von 240 V (Effektivwert) fließt daher ein Strom von  $240/250 = 0,96$  A, der ca.  $1/5$  Periode hinter der Spannung herläuft:



Für die Leistung (Differenz der grauen Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse) ist aber nur der *Wirkwiderstand* von  $200 \Omega$  maßgebend:  $P = I^2 \cdot R = 0,96^2 \cdot 200 \sim 184$  W.

Wenn der Widerstand und die Spule parallel geschaltet werden (ohne Bild), erhält man  $\underline{Z} = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = (200 \cdot 150j) / (200 + 150j) = 72 + 96j$  (d.h. Wirkwiderstand  $72 \Omega$ , Blindwiderstand  $96 \Omega$ )

$$|\underline{Z}| = \sqrt{(72^2 + 96^2)} = 120 \Omega, \varphi \sim 53^\circ$$

$$I = 240/120 = 2 \text{ A}, P = 2^2 \cdot 72 = 288 \text{ W}$$

## Resonanz im Serienschwingkreis

Wenn ein induktiver, ein kapazitiver und ein Ohmscher Widerstand in Serie geschaltet werden, erhält man den Gesamtwiderstand  $\underline{Z} = R + j \cdot \omega L - j / \omega C$ . Bei einer bestimmten Kreisfrequenz  $\omega_0$  heben der induktive und kapazitive Widerstand einander auf. Der Gesamtwiderstand wird minimal, es kommt zur Resonanz (d.h. bei dieser Frequenz ist der Strom am stärksten). So kann man einen Radio- oder Fernsehempfänger auf eine bestimmte Frequenz einstellen.