

3 حركة القمر الصناعي في مداره *Satellite Orbit Motion*

تتطلب كل مهام وأغراض جيوديزيا الأقمار الصناعية تقريبا معرفة مواقع الأقمار الصناعية المترتبة بمعلومات زمنية دقيقة في إطار مرجعي مناسب. إن حساب مدارات الأقمار والتنبؤ بها، وكذلك إيجاد طرقا ملائمة للقياسات والتعديل يعتبر مطلباً أساسياً لحساب كل العناصر التالية:

- الإحداثيات الجيومركزية لمحطات الرصد

- وسائط لوصف حقل الجاذبية الأرضية وكذلك لتعيين جيويدي دقيق

- وسائط توجه الأرض في الفضاء.

تتعلق دقة الحساب النهائية بالدقة المتوفرة لمدارات الأقمار، تصحّ هذه المقولة بشكل كامل ومتزايد في مجال الجيوديزيا التطبيقية كتعيين إحداثيات نسبية في نظام ال *GPS*، للحصول على دقة نسبية في الإحداثيات مقدارها 1 cm يتوجب معرفة مدارات الأقمار الصناعية بدقة عدة أمتار (فقرة 4.14.3).

على مستخدمي طرق جيوديزيا الأقمار الصناعية، الملاحه والمجالات المشابهة الأخرى الإلمام بالمعرفة الأساسية لحركة الأقمار في مداراتها والإعاقات الرئيسية التي تخضع لها بهدف إتخاذ الإجراءات الملائمة لتعيين المسارات. في هذا الفصل سوف يتم شرح المعلومات الأساسية مبتدئين بحركة كيبلر *Kepler* النظرية (حركة القمر الصناعي غير المعاقة) في حقل قوى مركزي ومن ثم نذكر بإختصار الإعاقات الرئيسية وتأثيرها على مدارات الأقمار الصناعية.

3.1 أساسيات في الميكانيك السماوي *Fundamentals of Celestial Mechanics*

نهتم في الميكانيك السماوي بحركة الأجسام السماوية تحت تأثير جذب كتل متبادل. أبسط شكل لهذا الجذب هي مسألة جسمين *two body problem*. من أجل الأقمار الصناعية يمكن إهمال كتلة القمر بالنسبة إلى كتلة الجسم المركزي (الأرض). يمكننا وصف مسألة الجسمين كما يلي:

بمعرفة موقعي وسرعتي جسمين معروف في الكتلة في زمن ما يتحركان تحت تأثير قوى جذبهما المتبادلة، يمكن حساب موقعهما وسرعتهما في أي زمن.

بافتراض أن الأجسام متجانسة وتولد حقل جاذبية لنقطة كتلية فيمكن وصف الحركة المدارية في مسألة جسمين تجريبياً بواسطة قوانين كيبلر وكذلك بواسطة ميكانيك نيوتن.

إن مسألة الجسمين هي من المسائل القليلة في الميكانيك السماوي التي لها حل كامل. مسألة الثلاث أجسام أو عدة أجسام ليس لها حل عام. يعالج الميكانيك السماوي مسألة إعاقه المدارات وحساب التقويمات.

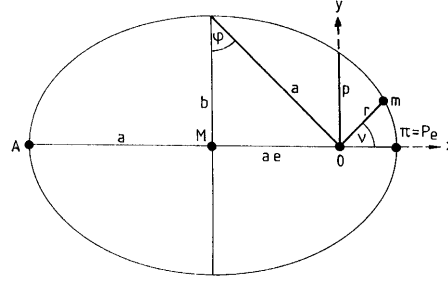
يعود الميكانيك السماوي الحديث إلى عام 1687 بإصدار العالم إسحق نيوتن كتابه *Principia*، تمّ فيه وصف قوانين الجاذبية والحركة للمرة الأولى. في الثلاثة مئة سنة التالية لم يتم تطور جذري في الميكانيك السماوي، ولكن إطلاق أول قمر صناعي وتطوير الحاسبات الكبيرة مكّن من إعطاء دفعة لأفكار جديدة. بعد أن كانت القياسات تقتصر على الإتجاهات يمكن حديثاً قياس المسافات وتغيراتها. إضافة إلى إعاقه الشمس المعروفة وإعاقه القمر والكواكب الأخرى لحركة الأقمار، يجب أن تعالج أيضاً تأثيرات حقل الجاذبية المتغير والقوى الأخرى المستقلة عن الجاذبية. من خلال تطوير حواسيب سريعة فإنه يمكن معالجة كمية معطيات كبيرة وإستعمال طرق تكامل عديدة.

3.1.1 حركة كيبلر *Keplerian Motion*

شكّل العالم يوهان كيبلر *Johannes Kepler 1571-1630* قوانينه الثلاثة المتعلقة بحركة الكواكب تجريبياً معتمداً على قياسات الفلكي *Tycho Brahe 1546-1601* التي أجراها في الدانمارك. القوانين الثلاثة تعطي وصفاً وليس تفسيراً لحركة الكواكب. هذه القوانين تتضمن تقريبات كبيرة للحركات الحقيقية داخل المجموعة الشمسية لأن كتل الكواكب يمكن إهمالها بالمقارنة مع كتلة الشمس ولأنه يمكن إعتبار الشمس كنقطة كتلية بإعتبار أن المسافات شاسعة بين الأجسام وبينها. لذلك تدعى الحركة الثقالية الغير معاقة بحركة كيبلر.

القانون الأول: إن مسار كل كوكب هو إهليلج تقع الشمس في أحد محرقيه.

الشكل الهندسي للمدار معرف في هذا القانون، الشكل 3.1 يبين الرموز الإعتيادية.



شكل 3.1: الشكل الهندسي للمدار الإهليلجي.

يدعى المحور الرئيسي $A\pi$ خط التكوّر *Line of Apse*.

في حال إعتبار أن النقطة O هي مركز المجموعة الشمسية تدعى إذا النقطة A الأبعد عن النقطة المركزية ب *Apocenter* والنقطة π الأقرب *Pericenter*.

في حال إعتبار أن النقطة O هي مركز كتلة الشمس تدعى النقطة A *Aphelion* والنقطة π *Perihelion*.

في حال إعتبار أن النقطة O هي مركز كتلة الأرض فتدعى النقطة A عند π *Apogee* والنقطة π تدعى *Perigee*. الزاوية v تدعى دوما الإنحراف الحقيقي. نفترض حركة كيبلر مستويا للحركة. يمكن إعتداد مستوي المدار هذا لتعريف جملة إحداثيات بحيث تشكل النقطة O نقطة المبدأ. يمكن تعيين موقع نقطة كتلية m عند π بإحداثياتها القطبية في المستوي (r, v) . بفرض 0π أحد محاور الإحداثيات المدارية وبإعتبار: r بعد النقطة ذات الكتلة m عن مركز الكتلة الرئيسية،

v الإنحراف الحقيقي،

a نصف طول المحور الكبير، e اللامركزية العددية، p وسيط متعلق بالإهليلج، نجد عندها معادلة المنحني الإهليلجي:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

وهذه العلاقة تعطي الشكل الرياضي لقانون كيبلر الأول.

قبل تقديم القانون الثاني يمكن عرض بعض العلاقات المبسطة الممكنة إستنتاجها من الشكل الهندسي:

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad a = \frac{p}{1 - e^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad 3.1$$

حيث a, e اللامركزية الخطية والتي تساوي البعد بين نقاط المحارق ومركز المدار.

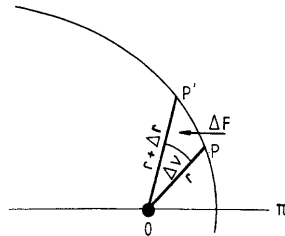
من أجل $e=0$ فإن $a=b=p$ ويتحول الإهليلج إلى دائرة. يمكن إستعمال الزاوية اللامركزية φ عوضا عن e ، عندها تتحقق العلاقات:

$$\begin{aligned} e &= \sin \varphi & \sqrt{1 - e^2} &= \cos \varphi \\ p &= a \cos^2 \varphi & b &= a \cos \varphi = p \sec \varphi. \end{aligned} \quad 3.2$$

القانون الثاني: الخط الواصل من الشمس إلى أي كوكب يسمح مساحات متساوية من الفضاء خلال أزمنة متساوية.

ويدعى أيضا قانون المساحات، ويصف سرعة الكوكب في مداره. إعتقادا على هذا القانون يمكن تعيين موقع كوكب كتابع للزمن بإحداثيات قطبية r, v . من الشكل 3.2 لدينا

$$\Delta F = \frac{1}{2} r^2 \Delta v. \quad 3.3$$



شكل 3.2: حركة القمر حسب قانون كيبلر الثاني.

العلاقة 3.3 صالحة تقريبا من أجل مثلث متناهي بالصغر O, P, P' . وحسب القانون الثاني تتناسب المنطقة الممسوحة ΔF بواسطة الشعاع r مع الفترة الزمنية المرافقة Δt ،

$$r^2 \Delta v = c \cdot \Delta t \quad 3.4$$

حيث c ثابتة. وتكتب العلاقة بشكل تفاضلي

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c. \quad 3.5$$

العلاقة 3.5 تعبر عن قانون كيبلر الثاني بشكل رياضي.

يمكن كتابة علاقات إضافية، بإدراج إحداثيات عمودية x, y . من الشكل 3.1 نجد

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos v \\ y &= r \cdot \sin v \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad 3.6$$

وكذلك

$$\tan v = \frac{y}{x}. \quad 3.7$$

بإشتقاق العلاقة 3.7 بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{\dot{v}}{\cos^2 v} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{x^2}. \quad 3.8$$

بتعويض 3.6 بالعلاقة 3.8 وإدخال 3.8 بالعلاقة 3.5 نجد معادلة تصف قانون كيبلر الثاني بواسطة إحداثيات عمودية

$$x \dot{y} - y \dot{x} = c. \quad 3.9$$

ندعى الثابتة c بثابتة المساحة.

القانون الثالث: إن مكعب أنصاف المحور الكبير لمدارات الكواكب متناسب مع مربع طور دوراناتها.

يعني ذلك بشكل رياضي أنه من أجل كوكب P_i ذو طور دوران U_i ، حركة نسبية

$$n_i = \frac{2\pi}{U_i} \quad 3.10$$

ونصف قطر محور كبير a_i :

$$\frac{a_i^3}{U_i^2} = \frac{C^2}{4\pi^2} \quad 3.11$$

حيث C هي ثابتة من أجل المجموعة الكوكبية. بإدماج العلاقات 3.10 و 3.11 يكتب التعبير المستخدم عادة:

$$a_a^3 \cdot n_a^2 = C^2. \quad 3.12$$

توصل كيبلر لهذا القانون بشكل تجريبي لأنه يصف حركة الكواكب الكبيرة بشكل تقريبي. ولكن تم الحصول على قيمة عددية مختلفة كلياً من أجل أقمار كوكب المشتري *Jupiter*. لذلك تستخدم العلاقة

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (M + m) \quad 3.13$$

حيث k ثابتة عامة و M و m هما الكتل المعتمدة. يمكن تعيين كتل الأجسام السماوية بإستعمال العلاقة 3.13.

تصف قوانين كيبلر أبسط شكل لحركة الأجسام السماوية بفرض أنه لا توجد هناك قوى خارجية مؤثرة، وأن الكتل المعتمدة يمكن إعتبارها كنقاط كتلية أو إعتبار أجسام متجانسة ذات توزيع كتلي كروي. من أجل حركة قمر صناعي حول الأرض تصح تلك الفرضيات فقط كتقريب أولي. تشكل مدارات كيبلر مداراً مرجعياً مبسطاً وتعطي معلومات نوعية عن شكل الحركة. كان كيبلر يعتقد بأن تلك الحركات تتبع قوانين عامة. تلك القوانين العامة تم إيجادها من قبل إسحاق نيوتن 1643-1727 تحت إسم قانون الجاذبية.

3.1.2 ميكانيك نيوتن ومسألة جسمين Newton Mechanics and Two Body- Problem

3.1.2.1 معادلة الحركة Equation of Motion

في الكتاب الأول (المبادئ *principia*) قدم نيوتن قوانين الحركة الثلاثة:

1- كل جسم يبقى، في حالة سكونه أو حالة حركته حركة منتظمة بخط مستقيم، على حالته ما لم يجبر على تغيير حالته بتأثير قوة خارجية.

2- درجة تغير كمية التحرك (*momentum*) للجسم تتناسب مع القوة المؤثرة وهو بنفس اتجاه تأثير الحركة.

3- لكل فعل هناك رد فعل يساويه ويعاكسه بالإتجاه.

يعبر عن القانون الثاني بالعلاقة

$$K = m \ddot{r} \quad 3.14$$

حيث K هو المجموع الشعاعي لكل القوى المؤثرة على الكتلة m و $\ddot{r}$ شعاع التسارع للكتلة، مقاس في إطار مرجعي عطالي. إضافة لذلك فقد وصف نيوتن قانون الجاذبية العامة عام 1687 كما يلي:

$$K = -G \frac{Mm}{r^2}. \quad 3.15$$

حيث G ثابتة الجاذبية العامة:

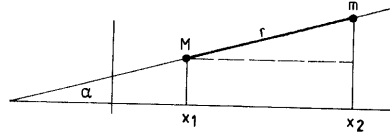
$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad 3.16$$

في نظام إحداثيات ديكارتي بمحاور x, y, z وبزوايا α, β, γ بين اتجاهات القوة ومحاور الجملّة فنجد من العلاقة 3.14 من حركة M بالنسبة إلى m موصوفة بالمركبات (شكل 3.3):

$$M \ddot{x}_1 \approx K_x \approx K \cos \alpha \quad 3.16$$

وبتعويض 3.15 نجد

$$M \ddot{x}_1 = -G \frac{Mm}{r^2} \cos \alpha = -G \frac{Mm}{r^3} (x_1 - x_2).$$



شكل 3.3: مركبات ضمن معادلة الحركة لنيوتن.

بعد إعادة ترتيب المعادلة نجد من أجل المركبات الثلاثة:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_1 &= G \frac{Mm}{r^3} (x_2 - x_1) \\ M \ddot{y}_1 &= G \frac{Mm}{r^3} (y_2 - y_1) \\ M \ddot{z}_1 &= G \frac{Mm}{r^3} (z_2 - z_1). \end{aligned} \quad 3.17$$

من حركة m بالنسبة إلى M نجد:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_2 &= -G \frac{Mm}{r^3} (x_2 - x_1) \\ m \ddot{y}_2 &= -G \frac{Mm}{r^3} (y_2 - y_1) \\ m \ddot{z}_2 &= -G \frac{Mm}{r^3} (z_2 - z_1). \end{aligned} \quad 3.18$$

بنقل مبدأ مجموعة الإحداثيات إلى مركز الكتلة M بإستعمال التعويض $x_2 - x_1 = x$, $y_2 - y_1 = y$, $z_2 - z_1 = z$ ، وبتقسيم العلاقات 3.17 على M والعلاقات 3.18 على m و ثم طرح المجموعتين 3.17 و 3.18 من بعضهما:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -G(M + m) \frac{x}{r^3} \\ \ddot{y} &= -G(M + m) \frac{y}{r^3} \\ \ddot{z} &= -G(M + m) \frac{z}{r^3} \end{aligned} \quad 3.19$$

حيث

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

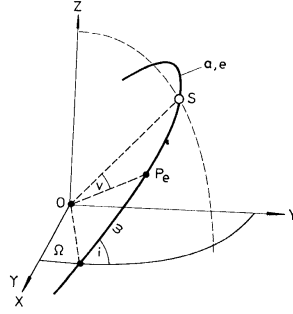
وبشكل شعاعي يكون

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M + m}{r^3} \mathbf{r}. \quad 3.20$$

من أجل قمر صناعي يمكن إهمال الكتلة m . تصبح المعادلة الأساسية لحركة القمر بالشكل التالي:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \quad 3.21$$

حيث r هو شعاع الموقع الجيومركزي للقمر الصناعي. إن العلاقة 3.21 هي الشكل الشعاعي لعلاقة تفاضلية من المرتبة الثانية ذات ستة ثوابت تكاملات. هذا يعني أن حركة جسم سماوي حول جسم مركزي، مسببة بالجذب المتبادل، لها 6 وسائط مستقلة. تستعمل عادة عناصر مدار كيبلر الستة كما في الشكل 3.4. حيث يمثل a نصف طول المحور الكبير، e اللامركزية العددية، i زاوية ميلان $inclination$ المدار، Ω زاوية الصعود المستقيم $right ascension$ للعقدة الصاعدة، ω مضمون ال $argument of perigee$ (أقرب نقطة إلى الجسم المركزي) و ν زاوية الإنحراف الحقيقي $true anomaly$.



شكل 3.4: عناصر كيبلر المدارية.

تم اشتقاق المعادلة 3.21 بإعتبار تأثير قوى الجاذبية فقط، إهمال كتلة القمر الصناعي، وكتلة الجسم المركزي مركزة بنقطة. وهذا، في الواقع العملي، غير صحيح لأن عدم تجانس تركيب الأرض الحقيقية يؤثر على حركة الأقمار القريبة منها. بناء على ذلك يمكن إعتبار مدار كيبلر كتقريب أولي للمدارات الحقيقية للأقمار. سوف نتعرض لمناقشة تأثير العوامل المؤثرة الأخرى في الفقرة 3.2. إن تكاملات العلاقة 3.21 توصلنا إلى معطيات هامة، من بينها إمكانية اشتقاق قوانين كيبلر لحركة الأقمار الصناعية من قانون نيوتن في الجاذبية والحركة.

التكاملات:

بجداء المعادلات 3.19 ب x, y, z على الترتيب وتشكيل أزواج من التفاضلات نجد

$$\begin{aligned} x\ddot{y} - y\ddot{x} &= 0 \\ y\ddot{z} - z\ddot{y} &= 0 \\ z\ddot{x} - x\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \quad 3.22$$

وبالتكامل يكون

$$\begin{aligned} x\dot{y} - y\dot{x} &= C_1 \\ y\dot{z} - z\dot{y} &= C_2 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= C_3 \end{aligned} \quad 3.23$$

حيث C_1, C_2, C_3 ثوابت. بجداء المعادلات الواحدة بعد الأخرى ب x, y, z وتشكيل المجموع الكلي يحذف القسم اليساري من المعادلات ويكون

$$C_1 z + C_2 x + C_3 y = 0. \quad 3.24$$

وهذه معادلة مستوي يحتوي على مركز جملة الإحداثيات. ويمكن القول أن القمر الصناعي يدور في مستوي يحوي على مركز الجسم المركزي. يمكن تحديد توجه هذا المستوي بواسطة وسيطين، مثلاً i و Ω كما في الشكل 3.4. العلاقة بين الوسيطين i و Ω وبين الثوابت تكون عندها

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{N} &= \sin \Omega \sin i \\ \frac{C_2}{N} &= -\cos \Omega \sin i \\ \frac{C_3}{N} &= \cos i \end{aligned} \quad 3.25$$

حيث $N = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$ هو ناظم مستوي المدار.

باعتبار ان الحركة موجودة على مستوي فيمكن إدراج جملة إحداثيات مستوية عمودية ξ, η ذات مبدأ يقع في مركز كتلة الجسم المركزي (شكل 3.5). تكون معادلات الحركة الموافقة للعلاقة 3.21 حسب مركباتها كما يلي:

$$\ddot{\xi} = -GM \frac{\xi}{r^3}; \quad \ddot{\eta} = -GM \frac{\eta}{r^3} \quad 3.26$$

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \text{حيث}$$

والعلاقة الموافقة للعلاقة 3.22 تكون

$$\xi \ddot{\eta} - \eta \ddot{\xi} = 0 \quad 3.27$$

والتي تصبح بعد التكامل

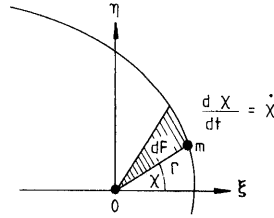
$$\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} = p_1. \quad 3.28$$

بتعويض العلاقة 3.28 بإحداثيات قطبية

$$\xi = r \cos \chi \quad \eta = r \sin \chi \quad 3.29$$

نعطي

$$r^2 \dot{\chi} = p_1. \quad 3.30$$



شكل 3.5: توضيح قانون المساحات.

باعتبار مساحة متناهية في الصغر dF ، ممسوحة بواسطة الشعاع r خلال الزمن المتناهي بالصغر dt (شكل 3.5) نجد من أجل مساحة المثلث المتناهي في الصغر

$$dF = \frac{1}{2} r^2 \dot{\chi} dt \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\chi} = \frac{1}{2} p_1 \quad 3.31$$

لذلك

$$F = \frac{1}{2} p_1 t + p_2. \quad 3.32$$

العلاقين 3.31 و 3.32 تحتويان على قانون كيبلر الثاني، حيث يمكن القول:

- تجري الحركة في مستوي

- الحركة تتبع قانون المساحات.

يتبقى إشتقاق برهان حول شكل المدار. بجاء العلاقة 3.26 بالحدود $2\dot{\eta}, 2\dot{\xi}$ على الترتيب

$$\begin{aligned} \xi 2\dot{\xi} &= -GM \frac{\xi}{r^3} 2\dot{\xi} \\ \eta 2\dot{\eta} &= -GM \frac{\eta}{r^3} 2\dot{\eta} \end{aligned} \quad 3.33$$

وبالجمع ينتج

$$\frac{d}{dt} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = -\frac{2GM}{r^3} (\xi \dot{\xi} + \eta \dot{\eta}). \quad 3.34$$

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \text{حيث}$$

$$2r\dot{r} = 2\xi\dot{\xi} + 2\eta\dot{\eta}$$

ويتبع

$$\frac{d}{dt}(\xi^2 + \eta^2) = -\frac{2GM}{r^3}\dot{r} = 2GM\left(\frac{\dot{r}}{r}\right) \quad 3.35$$

وتصبح بعد التكامل

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\frac{GM}{r} + p_3. \quad 3.36$$

نحصل بدلالة الإحداثيات القطبية وبعد التفاضل على

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\chi}^2 = \frac{2GM}{r} + p_3. \quad 3.37$$

إحدى حلول تلك المعادلة التفاضلية هي

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\chi - \bar{\omega})} \quad 3.38$$

حيث $\bar{\omega}$, p , e ، ثوابت. تشكل العلاقة 3.38 الشكل القطبي لمقطع مخروطي. من أجل $\chi = \bar{\omega}$ تصبح مسافة القمر r أصغرية، وهذا يعني أن القمر يمر من نقطة الحضيض *perigee* (فقرة 3.1.1 وشكل 3.1). باعتبار أن المسافة الزاوية لقمر من نقطة الحضيض تدعى الانحراف الحقيقي ν فإن العلاقة

$$\chi - \bar{\omega} = \nu \quad \text{تكون صحيحة. في حال } \nu = 90^\circ \text{ يكون } r=p. \text{ ونعرف من العلاقات 3.2 أن } p = a(1-e^2).$$

يمكن الآن وصف ثوابت التكامل هندسيا وتصبح العلاقة 3.38

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}. \quad 3.39$$

في حال قياس مضمون الإرتفاع $u = \omega + \nu$ *argument of latitude* من العقدة الصاعدة *ascending node* لمدار القمر، يمكن عندها تثبيت مبدأ قياس الزوايا. يمكن كتابة العلاقة 3.39 بشكل آخر أيضا

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}, \quad 3.40$$

حيث يعرف ω بأنه مضمون نقطة الحضيض *argument of perigee* (شكل 3.4). حتى الآن فقد تعاملنا بخمس عناصر من أصل عناصر التكامل الستة المذكورة وهي

$$\Omega, i, \omega, e, a.$$

الثابت الأخير هو الكمية p_2 في العلاقة 3.32، قانون كيبلر للمساحات، الذي يعين موقع القمر المتعلق بالزمن في مداره. تستعمل عدة وسائط متكافئة من بينها زمن عبور t_0 نقطة الحضيض *perigee* أو الانحراف الحقيقي ν . يمكن كتابة العلاقات التالية بين عناصر مدار كيبلر وبين ثوابت التكاملات

$$p = \frac{p_1^2}{GM}, \quad e^2 = 1 + \frac{p_1^2 p_3}{G^2 M^2}, \quad p_1 = \sqrt{GMp}, \quad p_3 = \frac{-GM}{a}. \quad 3.41$$

يمكن تشكيل قانون كيبلر الثالث من العلاقتين 3.32 و 3.41. إن فترة دوران قمر صناعي هي $T = t_2 - t_1$ ونحصل بذلك على مساحة مقطوعة بعد دورة كاملة

$$F_2 - F_1 = \frac{1}{2} p_1 (t_2 - t_1) = \pi ab \quad 3.42$$

وهذا يعني مساحة إهليلج. ومن العلاقات التالية

$$p_1 = \sqrt{GMp}, \quad b^2 = a^2(1 - e^2), \quad p = a(1 - e^2)$$

نحصل بعد إعادة بعض الترتيبات على

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}} \quad 3.43$$

والحركة الزاوية الوسطية

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad 3.44$$

ينتج التعبير الرياضي لقانون كيبلر الثالث

$$a^3 n^2 = GM \quad 3.45$$

وبذلك تم اشتقاق قوانين كيبلر الثلاثة باعتماد علاقات نيوتن الأساسية 3.14، 3.15. باستخدام المعادلة 3.36 وتعويض 3.41 يمكن الحصول على علاقة هامة أخرى من أجل p_3 تعطي سرعة القمر الصناعي في مداره

$$v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2 \frac{GM}{r} - \frac{GM}{a}$$

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad 3.46$$

العلاقة 3.37 مع تعويض $\dot{\chi} = \dot{v}$ تعطي العلاقة التالية بالإحداثيات القطبية

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{v}^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad 3.47$$

تبين المعادلة أن سرعة جسم سماوي تتعلق بالمسافة r ونصف القطر الكبير a وليس باللامركزية وبالتالي ليس بشكل المدار. إضافة لذلك باعتبار المعادلة 3.30 وتبديل 3.41 و 3.1 من أجل p_1 نصل إلى شكل آخر لقانون كيبلر الثاني

$$r^2 \dot{v} = \sqrt{GMa(1-e^2)}. \quad 3.48$$

بتعويض قيمة $\dot{v}$ من 3.48 في 3.47 نحصل على

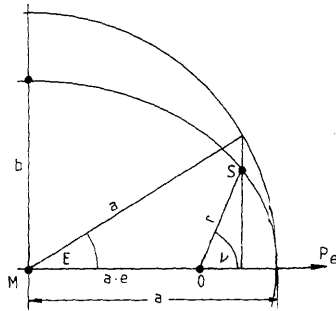
$$\dot{r}^2 + r^2 \frac{GMa(1-e^2)}{r^4} = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad 3.49$$

بتعويض 3.45 بالعلاقة 3.49 نحصل على

$$ndt = \frac{r}{a} \frac{dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}. \quad 3.50$$

لدينا من الشكل 3.6 العلاقة

$$r = a(1 - e \cos E) \quad 3.51$$



شكل 3.6: العلاقة بين الإنحراف الحقيقي ν واللامركزي E .

تعوّض العلاقة 3.51 بالعلاقة 3.50 فينتج

$$ndt = (1 - e \cos E) dE. \quad 3.52$$

ويعطي التكامل

$$n(t - t_0) = E - e \sin E. \quad 3.53$$

يدعى الوسيط E بالإنحراف اللامركزي *eccentric anomaly*. يمكن اعتبار ثابتة التكامل t_0 زمن عبور القمر في نقطة الحضيض *perigee* (أقرب نقطة من المسار إلى الجسم المركزي). الطرف الأيسر من المعادلة يزداد مع الزمن. يمكن تعريف، عوضاً عن الزمن t ، متحولاً جديداً $\bar{M}$ الإنحراف الوسيط *mean anomaly* ويعرّف كما يلي:

$$\bar{M} = n(t - t_0). \quad 3.54$$

تدعى العلاقة

$$\bar{M} = E - e \sin E \quad 3.55$$

بمعادلة كيبلر. وتعطى العلاقة مع الانحراف الحقيقي ν بالمعادلة التالية

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}. \quad 3.56$$

تأخذ كل الانحرافات E ، $\bar{M}$ ، ν قيمة الصفر عند مرورها بنقطة الحضيض. وهن يعرفن موقع القمر في مستوي مداره وبالتالي فهن ملائمتان لإتخاذهن كوسيط سادس للمدار. يفضل في جيوديزيا الأقمار الصناعية إتخاذ الانحراف الوسطي $\bar{M}$ لأنه يمكن إستخراجه بشكل خطي مع الزمن. لحل قيمة E من قيمة $\bar{M}$ ، فإن العلاقة 3.55 يجب أن تحوّل إلى منشور سلسلة إهلجسية. يمكن إيجاد عدة حلول في المراجع المختصة. إحدى الحلول مثلاً:

$$\begin{aligned} E = \bar{M} &+ (e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 - \frac{1}{9216}e^7) \sin \bar{M} \\ &+ (\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6) \sin 2\bar{M} \\ &+ (\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \frac{243}{5120}e^7) \sin 3\bar{M} \\ &+ (\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6) \sin 4\bar{M} + (\frac{125}{384}e^5 - \frac{3125}{9216}e^7) \sin 5\bar{M} \\ &+ \frac{27}{80}e^6 \sin 6\bar{M} - \frac{16807}{46080}e^7 \sin 7\bar{M} + \dots \end{aligned} \quad 3.57$$

من أجل لامركزيات صغيرة (مدارات أقمار نظام ال *GPS* مثلاً) فإن علاقة التقريب المتتالي التالية تعطي حلاً سريع جداً

$$\begin{aligned} E_0 &= \bar{M} \\ E_i &= \bar{M} + e \sin E_{i-1}, \quad i = 1 \dots \end{aligned} \quad 3.58$$

3.2 حركة القمر الصناعي المعاقة *Perturbed Satellite Motion*

تم حتى الآن إعتبار حركة القمر الصناعي ذو الكتلة المهملة تحت تأثير قوة جذب مركزية لنقطة كتلية وحيدة M . تم وصف حركة كيبلر هذه بالعلاقة الأساسية 3.21. يعطي تكامل تلك العلاقة

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t; a_1 \dots a_6) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t; a_1 \dots a_6) \end{aligned} \quad 3.59$$

حيث أن $a_1, \dots, a_6$ ثوابت تكامل حرة الاختيار. يفضل إستعمال عناصر مدار كيبلر $\bar{M}, \Omega, i, e, a$.

يؤثر في الواقع عدد معين من القوى الإضافية على الأقمار الصناعية القريبة من الأرض. تدعى تلك القوى بالقوى بالمزعجة أو المشوشة أو المعيقة *perturbing forces* لتمييزها عن قوة الجسم المركزي. يعاني القمر الصناعي من تسارعات إضافية بسبب تأثير تلك القوى، والتي يمكن أن تدمج بشعاع الإعاقة k_s . يمكن عندها كتابة معادلة الحركة المعممة كما يلي:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{k}_s. \quad 3.60$$

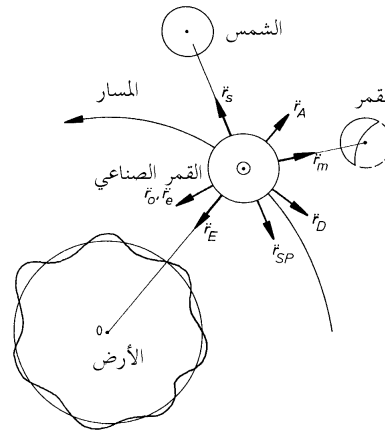
إن القوى المعيقة هي في الواقع

$$\begin{aligned} &- \text{تسارعات بسبب عدم تكور وعدم تجانس توزيع الكتلة في جسم الأرض المركزي } \ddot{\mathbf{r}}_E \\ &- \text{تسارعات بسبب أجسام سماوية أخرى (شمس، قمر وكواكب) } \ddot{\mathbf{r}}_s, \ddot{\mathbf{r}}_m \\ &- \text{تسارعات بسبب المد والجزر } \textit{tides} \text{ لجسم الأرض والمحيطات } \ddot{\mathbf{r}}_o, \ddot{\mathbf{r}}_e \\ &- \text{تسارعات بسبب إحتكاك الغلاف الجوي } \ddot{\mathbf{r}}_D \text{ atmospheric drag} \\ &- \text{تسارعات بسبب ضغط الإشعاع الشمسي } \textit{solar radiation pressure} \text{ المباشر والمنعكس من الأرض } \ddot{\mathbf{r}}_A, \ddot{\mathbf{r}}_{SP} \end{aligned}$$

ويكون شعاع الإعاقة الكلي

$$\mathbf{k}_s = \ddot{\mathbf{r}}_E + \ddot{\mathbf{r}}_s + \ddot{\mathbf{r}}_m + \ddot{\mathbf{r}}_e + \ddot{\mathbf{r}}_o + \ddot{\mathbf{r}}_D + \ddot{\mathbf{r}}_{SP} + \ddot{\mathbf{r}}_A. \quad 3.61$$

يبين الشكل 3.7 رسم تمثيلي للقوى المعيقة.



شكل 3.7: القوى المعيقة المؤثرة على القمر الصناعي في مداره.

يتعلق التسارع الكلي الناتج بموقع القمر r ، أي كمية يجب تعيينها من حل المعادلة التفاضلية 3.60 كتابع للزمن وهذا يعني أن تكامل المعادلة مسألة معقدة. إحدى الطرق المتبعة عادة لحل مسائل معقدة كهذه هي بإعتماد تسهيلات معقولة، وتصحيح الأخطاء الناتجة بمرحلة ثانية مستقلة. تدعى تلك التسهيلات المعقولة وسطية *intermediate*. وبناء على ذلك يمكن تسمية حركة القمر الصناعي وفق المعادلتين 3.21 و 3.59 بأنها حركة وسطية *intermediate motion* أو حركة أساسية. يتم استخدام إجرائين لحل مسألة الحركة المعيقة. في الحالة الأولى تعتبر إحداثيات القمر الصناعي معيقة *disturbed* (مشوشة) بشكل مباشر. يعين تأثير القوى المعيقة على الإحداثيات بشكل عددي وتحسب الفروقات بين الإحداثيات المعيقة وغير المعيقة. تدعى هذه الطريقة بالتكامل العددي للمدار. في الحالة الثانية تعتبر ثوابت التكامل a_i للحالة الغير معيقة (علاقة 3.59) كتوابع متعلقة بالزمن. يكون حل الحركة المعيقة بشكل رمزي

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t; a_1(t), \dots, a_6(t)) \\ \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t; a_1(t), \dots, a_6(t)), \end{aligned} \quad 3.62$$

حيث يجب إيجاد تعابير رياضية لعناصر المدار المرتبطة بالزمن. يدعى هذا الإجراء بالتكامل التحليلي *analytical integration*. تكمن الفكرة الأساسية بإعتبار الإعاقات كإنحرافات بين عناصر كيبلر الوسطية *intermediate* في زمن معين وبينها في نقاط زمنية *epochs* أخرى. لتطبيق الطريقة الأخيرة فمن الضروري الإبتداء بحل تقريبي لمعادلة الحركة. يمكن تحقيق هذه الشروط بإستخدام وسائط كيبلر من أجل الأقمار الصناعية القريبة من الأرض وكواكب المجموعة الشمسية.

3.2.1 تمثيل الحركة المدارية Representation of Orbital Motion

3.2.1.1 عوامل المدار المماسية أو الوسطية Osculation and Mean Orbital Elements

إن الرغبة بالحصول على عناصر مدارية متعلقة بالزمن يقود إلى مفهوم عناصر المدار المماسية *osculation orbital elements*. بإعتبار قمر صناعي ذو حركة تتبع المعادلة 3.60 وله الموقع rt_k في الزمن $t=t_k$ وشعاع السرعة $\dot{\mathbf{r}}(t_k)$. بإعتبار أن كل عوامل الإعاقه k_s يمكن حذفها في تلك اللحظة t_k ، عندها تمثل حركة القمر اللاحقة بحركة كيبلر غير معيقة ذات الشروط البدائية $\mathbf{r}(t_k)$ ، $\dot{\mathbf{r}}(t_k)$. يدعى هذا المدار بالمماسي *osculating* أو اللحظي، لأنه يتطابق مع المدار الحقيقي المعاق في اللحظة t_k حيث العناصر البدائية متساوية. عمليا لاتخفي القوى المعيقة لحركة القمر الصناعي، لذلك يقع القمر على مدار مماسي آخر مختلف من أجل كل نقطة زمنية. يمكن إعتبار المدار الحقيقي للقمر الصناعي كمغلف لكل المدارات المماسية ذات عناصر التماس $a(t_k)$ ، $e(t_k)$ ، $\dots$ ، $\bar{M}(t_k)$. بإعتبار t_k عامل زمني يزداد بإستمرار فيمكن تفسير حركة القمر المعيقة بكونها حركة دوبلر ذات وسائط متغيرة مع الزمن $\bar{M}(t)$ ، $\omega(t)$ ، $i(t)$ ، $e(t)$ ، $a(t)$. تمثل تلك العناصر تقريبا جيدا في تطبيقات جيوديزيا الأقمار الصناعية القريبة من الأرض حيث أن قوة جذب الأرض هي القوة الرئيسية المؤثرة والعناصر المذكورة لاتتغير بسرعة. لذلك يمكن تقريب عناصر المدار بمنشور أسّي بدلالة فروق زمنية $(t-t_0)$ حيث t_0 زمن وسطي:

$$a_i(t) = a_i(t-t_0) + \dot{a}_i(t-t_0) + \ddot{a}_i(t-t_0)^2 + \dots (i = 1, \dots, 6) \quad 3.63$$

يعود أصل العنصر المماس a_i إلى مجموع حدود (تغيرات) طويلة وقصيرة الأمد

$$a_i(t) = \bar{a}_i(t) + \Delta a_i(t). \quad 3.64$$

$\bar{a}_i(t)$ يحتوي مجموع أجزاء التغيرات الصغيرة التردد الزمنية القرنية *secular* (الذي يحدث مرة كل فترة طويلة، قرن أو عدة قرون) والثابتة، بينما يحوي $\Delta a_i(t)$ التغيرات العالية التردد. تدعى الحدود $\bar{a}_i(t)$ بالعناصر الوسطية. وهكذا يمكن اعتبار العناصر الوسطية كعناصر مماسية بغياب الحدود الدورية *periodic terms*.

3.2.1.2 معادلات الإعاقة للاغرانج Lagrange Perturbation Equations

يجب إنشاء علاقة بين القوى المعيقة المؤثرة والتغيرات المرتبطة بالزمن لعناصر المدار. شكّل لاغرانج (1736-1813) العلاقات الأساسية الملائمة. ندرج في مايلي مختصر العلاقات دون الدخول في التفاصيل الممكن الرجوع لها في المراجع المختصة. يمكن كتابة العلاقة 3.47 بالشكل

$$E_M = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \quad 3.65$$

حيث تمثل الثابتة E_M الطاقة الكلية *energy integral*. يمثل الحد الأول الطاقة الحركية للقمر الصناعي بكتلة واحدة $m=1$ ، والحد الثاني طاقته الكامنة *potential energy* بحيث أن الطاقة الميكانيكية الكاملة لحركة القمر الصناعي تبقى ثابتة في حال عدم وجود تأثيرات قوى خارجية. سبب الإشارة السالبة في حد الطاقة الكامنة هو اعتبار مبدأ الطاقة الكامنة موجود في اللانهاية. بكتابة العلاقة 3.65 من أجل أقرب نقطة للمدار من الجسم المركزي (*perigee* الحضيض) ينتج لدينا مع تجاوز التفاصيل

$$E_M = -\frac{GM}{2a} \quad 3.66$$

حيث تعبر تلك العلاقة عن كون طول نصف المحور الكبير لمدار قمر ما يتعلق بالطاقة الكلية للقمر فقط. يمكننا إذا كتابة

$$E_M = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$$

يدعى أيضا الحد السالب للطاقة الكلية $\frac{GM}{2a}$ بتابع القوة F . باعتبار القيمة السالبة للطاقة الكامنة V والطاقة الحركية T يكون تابع القوة F :

$$F = V - T. \quad 3.67$$

في حقل قوى غير مركزي تكون

$$\partial V = \frac{GM}{r} + R \quad 3.68$$

$$F = \frac{GM}{r} + R - T = \frac{GM}{2a} + R. \quad 3.69$$

يحتوي التابع R كل مركبات الحد المركزي $\frac{GM}{r}$ ويدعى تابع الإعاقة أو طاقة الإعاقة *disturbing potential*.

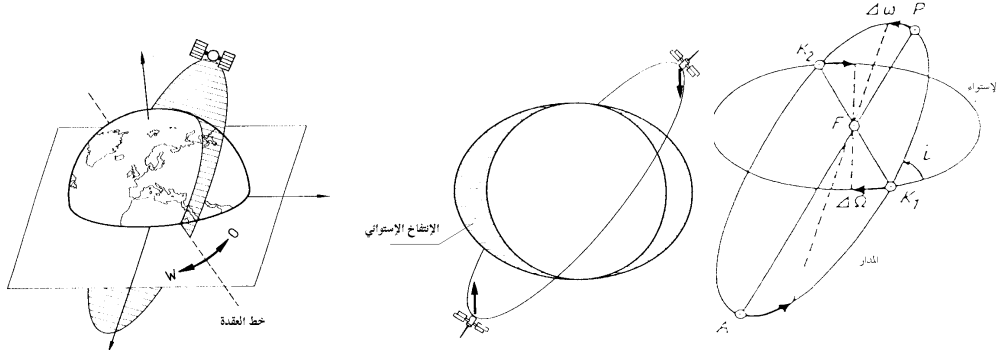
يتم، حسب لاغرانج، تكوين العلاقة بين R وبين تغيّرات عناصر المدار

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \bar{M}} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{M}} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2e\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned} \quad 3.70$$

يتطلب التكامل التحليلي لعلاقات الإعاقة 6.70 كون طاقة الإعاقة مكتوبة كتابع لعناصر المدار. يعتبر التكامل التحليلي أفضل طريقة لإدخال الإعاقات على مدارات الأقمار الصناعية.

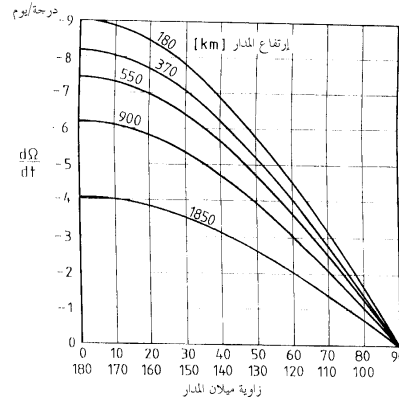
3.2.2 الحركة المعاقبة بسبب تغيرات حقل الجاذبية الأرضية Disturbed Motion due to the Anomalous Earth's Gravity Field

القوة المعيقة المهيمنة على مدار الأقمار الصناعية القريبة من الأرض هي بسبب تفلطح الأرض (شكل 3.8).



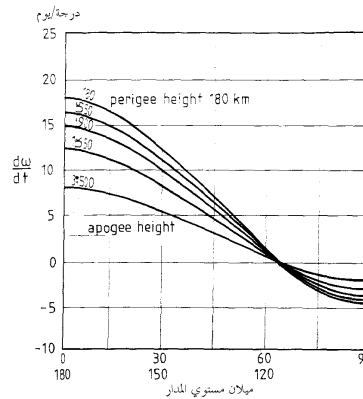
شكل 3.8: سبق العقدة المسبب بالإنخفاض الإستوائي.

يولد الإنخفاض الإستوائي مزدوجة تدوير خفيفة على القمر الصناعي تحاول تدوير مدار القمر إلى داخل المستوي الإستوائي. ينتج تأثير مشابه لتأثير عملية السبق *precession* على محور دوران الأرض (فقرة 2.1.2). يتحرك شعاع العزم الزاوي للمدار حول محور الأرض بعزم أعظمي، أي مستوي المدار والعقد (الصاعدة والهابط) تتحرك غربا بالنسبة للمدار المباشر (عند العقدة الصاعدة) وشرقا بالنسبة للمدارات المعكوسة (عند العقدة الهابط). يبين الشكل 3.9 نسبة تراجع العقدة. يمكن أن يصل التأثير إلى 9 درجات في اليوم من أجل المدارات القريبة من سطح الأرض ($< 200 \text{ km}$) ومن أجل ميول صغيرة لمستويات المدارات. لاتعاني المدارات القطبية من ظاهرة سبق العقدة (بإهمال حدود المرتبة العليا في توزيع الكتلة). تفيد معرفة تأثير سبق العقدة *nodal precession* مثلا لتوليد فترات تكرار معينة لرصد الأرض، أو لتوليد مدارات متزامنة (مع الشمس مثلا).



شكل 3.9: العلاقة بين إرتفاع المدار، زاوية ميلانه وسبق العقدة اليومي.

إن تفلطح الأرض له تأثير آخر يؤثر على أغلب المدارات اللامركزية وهو تدوير خط التكور *line of apsides* (شكل 3.1) $d\omega/dt$ (شكل 3.10).



شكل 3.10: العلاقة بين ميلان المدار، الإرتفاع ودوران نقطة الحضيض *perigee*.

يعطي الشكل إنطباع عن هذا التأثير من أجل مدارات ذات إرتفاع 190 km لنقطة الحضيض *perigee* وإرتفاعات مختلفة لنقاط المدارات المقابلة *apogee*. يدور خط التكور باتجاه حركة القمر من أجل المدارات ذات الميلانات $i < 64.4^\circ$ و $i > 116.6^\circ$. من أجل الميول $64.4^\circ < i < 116.6^\circ$ يكون دوران خط التكور *apside* عكس اتجاه حركة القمر.

3.2.2.1 إعاقات مسببة بالعوامل المكانية *Perturbations caused by Zonal Coefficients J_n*

من أجل تفصيلات إضافية للعلاقة بين الطاقة الثقالية المتغيرة للأرض وتغيرات مدار القمر الصناعي يستعمل منشور سلسلة بعوامل توافق دائرية *spherical harmonics* من أجل طاقة الأرض الكامنة، معروف في الجيوديزيا الفيزيائية:

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right) \quad 3.71$$

العوامل C_{nm} و S_{nm} هم عبارة عن تكاملات كتلة تصف توزيع الكتلة داخل الجسم المركزي. a_e هو نصف القطر الإستوائي، و P_{nm} توابع لاغرانج. يمثل الحد الأول GM/r طاقة كرة متجانسة ويعود إلى حركة كيبلر ويدعى حد كيبلر. الحد المتبقي يعود إلى الطاقة المعيقة.

من أجل تقدير تأثير تغيرات حقل الجاذبية الأرضية على مدارات الأقمار الصناعية فيكفي، غالباً، تعيين التسارعات المسببة بعوامل التوافق الأولى. يتم هنا تبسيط المعادلة 3.71. ويعوض عادة في جيوديزيا الأقمار الصناعية

$$C_{n0} = -J_n \quad 3.72$$

وينتج عندها

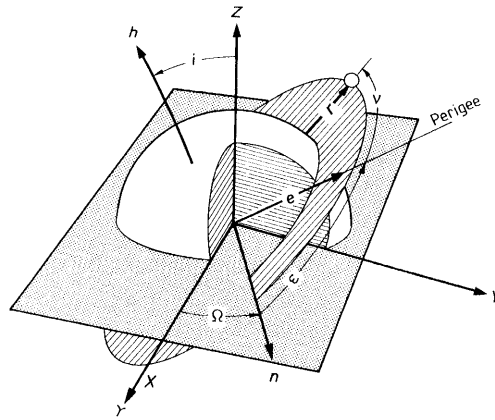
$$V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_n(\cos \vartheta) \right) \quad 3.73$$

بتحديد النشر حتى درجة $n=6$ وتعويض L من أجل زاوية خط العرض الجغرافية نجد:

$$\begin{aligned} V = \frac{GM}{r} & \left(1 - \frac{J_2}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (3 \sin^2 L - 1) + \frac{J_3}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 (5 \sin^3 L - 3 \sin L) \right. \\ & - \frac{J_4}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 (35 \sin^4 L - 30 \sin^2 L + 3) \\ & + \frac{J_5}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 (63 \sin^5 L - 70 \sin^3 L + 15 \sin L) \\ & \left. - \frac{J_6}{16} \left(\frac{a_e}{r} \right)^6 (231 \sin^6 L - 315 \sin^4 L + 105 \sin^2 L - 5) \right). \end{aligned} \quad 3.74$$

باستعمال أشعة الوحدة X, Y, Z في النظام الإستوائي (شكل 3.11) نحصل على التسارع $\ddot{\mathbf{r}}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{X} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{Y} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{Z} \quad 3.75$$



شكل 3.11: أشعة الوحدة في الجملة الإستوائية.

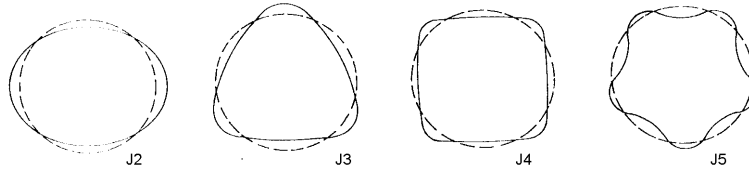
وبالتالي تكون مركبات التسارع $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ في موقع القمر الصناعي x, y, z

$$\ddot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{GM_N}{r^3} \left(1 - J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(5 \frac{z^2}{r^2} - 1 \right) + J_3 \frac{5}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 \left(3 \frac{z}{r} - 7 \frac{z^3}{r^3} \right) \right. \\ \left. - J_4 \frac{5}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 \left(3 - 42 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) \right. \\ \left. - J_5 \frac{3}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 \left(35 \frac{z}{r} - 210 \frac{z^3}{r^3} + 231 \frac{z^5}{r^5} \right) \right. \\ \left. + J_6 \frac{1}{16} \left(\frac{a_e}{r} \right)^6 \left(35 - 945 \frac{z^2}{r^2} + 3465 \frac{z^4}{r^4} - 3003 \frac{z^6}{r^6} \right) + \dots \right) \quad 3.76$$

$$\ddot{y} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y}{x} \ddot{x} \quad 3.77$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{GM_N}{r^3} \left(1 + J_2 \frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \right. \\ \left. + J_3 \frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 \left(10 \frac{z}{r} - \frac{35}{3} \frac{z^3}{r^3} - \frac{r}{z} \right) \right. \\ \left. - J_4 \frac{5}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 \left(15 - 70 \frac{z^2}{r^2} + 63 \frac{z^4}{r^4} \right) \right. \\ \left. - J_5 \frac{3}{8} \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 \left(35 - 210 \frac{z^2}{r^2} + 231 \frac{z^4}{r^4} - 77 \frac{z^6}{r^6} \right) + \dots \right) \quad 3.78$$

قيم عددية لعوامل التوافق الدنيا $J_n = -C_{n0}$ مثلا: $J_2 = 1082.63 \times 10^{-6}$, $J_3 = -2.54 \times 10^{-6}$, $J_4 = -1.62 \times 10^{-6}$, $J_5 = -0.23 \times 10^{-6}$, $J_6 = -0.55 \times 10^{-6}$. يمكن شرح عامل توافق مكاني هندسيا كإحرف معين عن شكل الكرة (شكل 3.12).



شكل 3.12: عوامل التوافق المكاني الدنيا.

يعود J_2 مثلا إلى تفلطح الأرض، J_3 للشكل المثلثي، J_4 للشكل التريبيعي ... وهكذا.

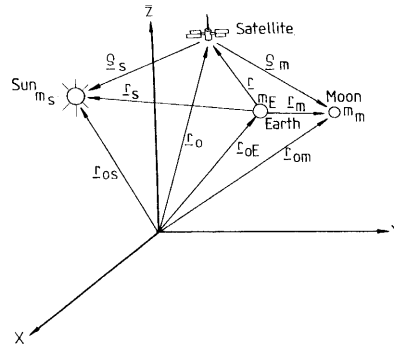
3.2.3 قوى إعاقاة مسببة من الشمس والقمر *Perturbing Forces caused by the Sun and the Moon*

باعتبار الشمس والقمر نقاط كتلية مثل القمر الصناعي فيمكن تطبيق علاقة الحركة الأساسية 3.21:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}.$$

باعتبار كتلة القمر الصناعي بالنسبة لكتلة الشمس والقمر مهملة و X, Y, Z نظام إحداثيات عطالي مبدأه مركز كتلة الأرض، ومن الشكل 3.13 وباعتبار $|\rho| = \rho, |r| = r$ و $m_E = M$ نجد

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + Gm_m \left(\frac{\rho_m}{\rho_m^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{r_m^3} \right) \quad 3.79$$



شكل 3.13: جذب القمر والشمس للقمر الصناعي.

الحد الأول هو نتيجة تأثير الأرض ويكون إذا تسارع الإعاقاة الناتج عن تأثير جذب القمر على القمر الصناعي

$$\ddot{\mathbf{r}}_m = Gm_m \left(\frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}}{(r_m - r)^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{r_m^3} \right) \quad 3.80$$

ويكون تأثير جذب الشمس إذا

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = Gm_s \left(\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{(r_s - r)^3} - \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} \right) \quad 3.81$$

يجب أن تكون كتل ومواقع الأجسام المؤثرة معروفة، فمثلا تعتمد القيمة $1325.10^8 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ بالنسبة للحد Gm_s و $49.10^2 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ من أجل القمر. تتخذ مواقع الشمس والقمر من جداول التقويمات الملاحية مثلا أو من شرائط مغناطيسية مجهزة من قبل مخبر *Jet Propulsion Laboratory* الأمريكي.

يجب حساب هذا التأثير في حال حساب مدار القمر الصناعي، فقد تصل قيمة التسارع المؤثر على القمر الصناعي إلى 5.10^{-6} m/s^2 .

3.2.4 المد والجزر في جسم الأرض والمحيطات Solid Earth Tides and Ocean Tides

يغير المد والجزر في جسم الأرض وفي المحيطات الطاقة الثقالية للأرض ويسبب تسارعات إضافية تؤثر على القمر الصناعي الذي يمكن اعتباره تأثيرا غير مباشر لجذب القمر والشمس. يكتب تسارع القمر الصناعي المسبب من عملية مد وجزر جسم الأرض كالتالي

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \frac{k_2}{2} \frac{Gm_d}{r_d^3} \frac{a_c^5}{r^4} (3 - 15 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{r}}{r} + 6 \cos \theta \frac{\mathbf{rd}}{r_d} \quad 3.82$$

حيث m_d كتلة الجسم المعيق

r_d شعاع الموضع الجيومركزي للجسم المعيق

θ الزاوية بين r_d وشعاع الموقع للقمر الصناعي r

k_2 عدد لاف Love يصف طواعية جسم الأرض.

إن هذا التأثير يكون صغيرا على أقمار نظام ال GPS وله القيمة 10^{-9} m/s^2 . من أجل الأقمار الصناعية ذات المدارات المنخفضة مثل STARLETTE يكون التأثير أكبر بكثير. لذلك يستعمل القمر STARLETTE لتعيين وحساب المد والجزر لجسم الأرض الصلب.

يعتبر تأثير المد والجزر للمحيطات على تسارع القمر الصناعي في مداره صعبا جدا بسبب عدم إنتظام خطوط الشواطئ. بإستعمال معادلة عالمية global يمكن، من أجل أي نقطة P من سطح المحيط، حساب إرتفاعات المد والجزر وتغيرات الكتلة الناتجة عنها

$$dm_p = \rho_0 h(P, t) d\sigma. \quad 3.83$$

حيث ρ_0 كثافة الماء الوسطية، t الزمن و $d\sigma$ عنصر سطح. يكون تغير الطاقة الكامنة المسبب من تغير الكتلة

$$\Delta U = \frac{Gdm_p}{a_c} \sum_n (1 + k'_n) P_{n0} \cos \psi, \quad 3.84$$

الذي يمكن أن يربط بإعاقات المدار بربطه بحد الطاقة المعيقة *disturbing potential* من العلاقة 3.71. يمثل العامل k'_n عوامل التشوه، P_{n0} كثيرات حدود لوجاندر *Legendre polynomials* و ψ الزاوية المركزية بين النقطة المبدئية A والنقطة المعتمدة P .

إن تأثير المد والجزر على الأقمار الصناعية صغير جدا. أكبر تأثير له يغير زاوية ميلان مستوي المدار i وزاوية الصعود المستقيم له Ω . لتلك التأثيرات دورات زمنية تتراوح بين 10 و 100 يوم وتكون غالبا أقل من 0.1. من أجل أقمار ال GPS فإن التسارع الناتج يكون من مرتبة 10^{-9} m/s^2 وهذا يوافق تغيرا في الموقع المداري بمقدار أقل من 1 m خلال يومين. من أجل الأقمار ذات المدارات المنخفضة يجب العناية الشديدة بحساب تلك التأثيرات.

3.2.5 إعاقاة طبقات الغلاف الجوي Atmospheric Drag

من أجل الأقمار الصناعية ذات المدارات المنخفضة فإن أحد أهم الإعاقات الغير ناتجة عن الجاذبية هو الإحتكاك بالطبقات الهوائية. تتعلق القوى الميكانيكية الهوائية *aerodynamical forces* المؤثرة على المركبة الفضائية بعوامل

- الشكل الهندسي للقمر الصناعي

- سرعته

- إتجاه القمر الصناعي بالنسبة للتيار الهوائي

- كثافة، حرارة وتركيب الغازات.

لذلك فإن حساب دقيق لتلك التأثيرات تعتبر مسألة معقدة. تم التوصل تجريبيًا إلى معادلة أعطت نتائج جيدة. إتجاه التسارع هنا هو عكس إتجاه قوة مقاومة الهواء (الغلاف الجوي)

$$\ddot{\mathbf{r}}_D = -\frac{1}{2}C_D\rho(\mathbf{r}, t)\frac{A}{m_s}(\mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}_a)|\mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}}_a| \quad 3.85$$

حيث

m_s كتلة القمر الصناعي

A المقطع الفعال لسطح القمر

C_D عامل الإحتكاك (خاص بكل قمر صناعي)

$\rho(r;t)$ كثافة الغلاف الجوي بالقرب من القمر الصناعي

$\dot{r}$ و r شعاع الموقع والسرعة للقمر الصناعي

$\dot{r}_a$ سرعة الغلاف الجوي بالقرب من القمر الصناعي

بفرض أن الغلاف الجوي يتحرك مع جسم الأرض الصلب نحصل، في نظام إحداثيات إستوائي مركزي، على

$$\dot{\mathbf{r}}_a = \begin{pmatrix} \dot{x} + \dot{\theta}y \\ \dot{y} - \dot{\theta}x \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad 3.86$$

حيث $\dot{\theta}$ معدل سرعة دوران الأرض. من أجل قمر صناعي كروي تكون $C_D=1$. من أجل سطوح أكثر تعقيدا، مثل إسطوانة، مخروط أو صفيحة، يأخذ C_D قيمة أكبر. تتعلق كثافة الغلاف الجوي لإرتفاع بعوامل أخرى مثل الموقع الجغرافي، فصول السنة، الوقت اليومي، نشاط الشمس والحقل المغناطيسي، ويمكن أن تحسب بمعادلات ملائمة. يمكن الحصول على معطيات عن نشاط الشمس والحقل المغناطيسي للأرض من منشورات علمية، مثل معطيات الشمس الفيزيائية *Solar Physical Data* من الإدارة الوطنية للمحيطات والغلاف الجوي الأمريكية *NOAA*. يتناقص تأثير الغلاف الجوي بإزدياد الإرتفاع. من أجل المناطق العليا يمكن للنشاط الشمسي أن يسبب تغيرات بالكثافة من رتبة 10^{-3} (عشرة أضعاف). يمكن للقوى المعيقة المؤثرة على القمر الصناعي أن تسبب تغيرات في التسارع من مرتبة 10^{-9} إلى $10^{-3} m/s^2$. يتأثر الانحراف الوسطي $\bar{M}$ على الأكثر من تأثير الغلاف الجوي لأن تأثير قوة إحتكاك الغلاف الجوي موجه بإتجاه الحركة المدارية للقمر الصناعي. بسبب توازن الطاقة تتناقص الطاقة الكلية لحركة القمر الصناعي سويا مع الطاقة الحركية، وبالتالي ينقص طول نصف المحور الكبير للمدار a . وحسب قانون كيبلر الثالث، فإن السرعة الزاوية للقمر الصناعي سوف تزداد بسبب قوة إحتكاك الغلاف الجوي. يكون هذا التأثير كبيرا على أقمار نظام ال *TRANSIT* مثلا ذات الإرتفاع $1000 km$ ، بينما معدوما على أقمار نظام ال *GPS*.

3.2.6 ضغط الإشعاع الشمسي المباشر وغير المباشر *Direct and Indirect Radiation Pressure*

يؤثر الإشعاع المنبعث بشكل متواصل من الشمس على القمر الصناعي تأثيرين هما التأثير الناتج من الإشعاع الشمسي المباشر والتأثير الناتج عن إنعكاس الإشعاع الشمسي من الأرض (ويدعى تأثير *albedo*). تتناسب القوى المؤثرة على القمر الصناعي طردا مع مساحة القمر الصناعي الفعالة، ودرجة قابلية العكس للسطح والبقع الشمسية (النشاط الشمسي). وتتناسب عكسا مع سرعة الضوء ومربع البعد بين الشمس والقمر الصناعي. يكون تسارع الإعاقة الناتج إذا

$$\ddot{\mathbf{r}}_{SP} = \nu P_s \frac{C_r O}{m} (AU)^2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3} \quad 3.87$$

حيث

P_s ثابت شمسي (ناتج من سرعة الضوء والنشاط الشمسي، بالواحدة الفلكية. الواحدة الفلكية تساوي $1.5 \times 10^8 km$)

O/m نسبة سطح القمر الصناعي إلى كتلته

r, r_s أشعة الموقع للقمر الصناعي وللشمس في نظام إحداثيات إستوائي مثبت بالفضاء

C_r عامل قابلية العكس لسطح القمر الصناعي ($C_r=1.95$ من أجل الألمنيوم)

ν تابع الظل، حيث $\nu=0$ القمر الصناعي يقع في ظل الأرض

$\nu=1$ القمر الصناعي يقع في ضوء الشمس

$0 < \nu < 1$ القمر الصناعي يقع في منطقة نصف الظل

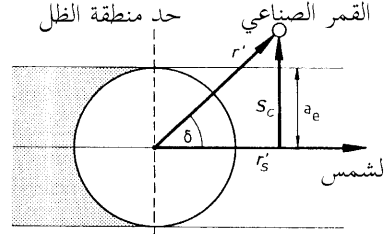
في الشكل 3.14 يقع القمر الصناعي في ضوء الشمس إذا تحققت العلاقة

$$D = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'_s > 0 \quad 3.88$$

$$D < 0$$

وفي الظل إذا كانت

$$|\mathbf{S}_c| = |\mathbf{r}' - D\mathbf{r}'_s| < a_e.$$



شكل 3.14: معادلة ظل إسطوانة.

a_e هو نصف محور الجسم المسبب للظل (الأرض)، و r'_s شعاع الواحدة باتجاه الشمس.

هذه المعادلة تقريبية ولا تكفي لمتطلبات الدقة العالية. لتجنب إنقطاع حسابات المدار بالقرب من مناطق الظل يمكن استخدام تابع الظل المهذب *smoothed*. وكذلك يمكن استعمال الثابت الشمسي كمتحول لحساب نشاط شمسي متغير. كما يمكن استعمال معادلات معقدة من أجل سطوح الأقمار الصناعية.

إن الحساب الدقيق لتأثير الإشعاع الشمسي على أقمار الـ *GPS* صعب بسبب التركيب المعقد لها. يقسم عادة سطح القمر إلى عدة سطوح كصفائح وإسطوانات.

يؤثر الإشعاع الشمسي المباشر باتجاه حركة المدار (*along track*)، ويمكن أن يصل لأكثر من 10 m بعد عدة ساعات.

ينعكس جزء من الإشعاع الشمسي بواسطة الأرض. تدعى النسبة بين الأشعة المنعكسة والمباشرة بـ *albedo*، وهو صعب الحساب بسبب توزع اليابسة، البحر والغيوم، ولكنه يساوي غالبا حوالي 10% من التأثير المباشر. من أجل أقمار الـ *GPS* يكون هذا التأثير بحدود 1%-2%، لذلك يهمل عادة في حسابات مدارات أقمار نظام الـ *GPS* إلا في حال حسابات أقواس مدارات طويلة جدا.

من أجل حسابات مسارات عالية الدقة هناك تأثيرات إعاقات إضافية تنتج تسارعات إعاقاة أقل بكثير من $10^{-9} m/s^2$. وتلك التأثيرات هي مثلا

- احتكاك مع جزيئات مشحونة كهربائيا في طبقات الغلاف الجوي العالية

- إشعاع حراري للقمر الصناعي

- تأثير إرتفاع درجة الحرارة على حدود مناطق الظل

- تأثير إلكترومغناطيسي في حقل المغناطيسي للأرض

- تأثيرات الغبار الكوني *inter planetary dust*.

لأغراض عملية لا تؤخذ تلك التأثيرات بعين الاعتبار في جيوديزيا الأقمار الصناعية.

تم في هذا الفصل تقديم عرضا لحركة الأقمار الصناعية في مداراتها وموجزا عن العوامل المعيقة لتلك الحركة، وذلك كفكرة عامة للإلمام ببعض الأساسيات اللازمة قبل الدخول في تفاصيل نظام التوضع العالمي *GPS*.