

Differenzialgleichung

Die Differenzialgleichung ist die kontinuierliche Variante der Differenzengleichung, die wir schon bei den Folgen und Reihen als rekursive Form ($y_{n+1} = y_n + 5$) kennengelernt haben.

Sie besteht aus y' (oder y'') und y -Termen, gemeinsam mit Zahlen (Beispiel: $y' = \frac{y}{x}$)

Beispiel 1:

Die Differenzengleichung $y_{n+1} = y_n + 5$ (mit $y_1 = 0$) führt zu der arithmetischen Folge $\langle 0; 5; 10; 15; \dots \rangle$. Der Übergang zur kontinuierlichen Gleichung $y' = \frac{dy}{dx} = 5$ lässt sich folgendermaßen nachvollziehen:

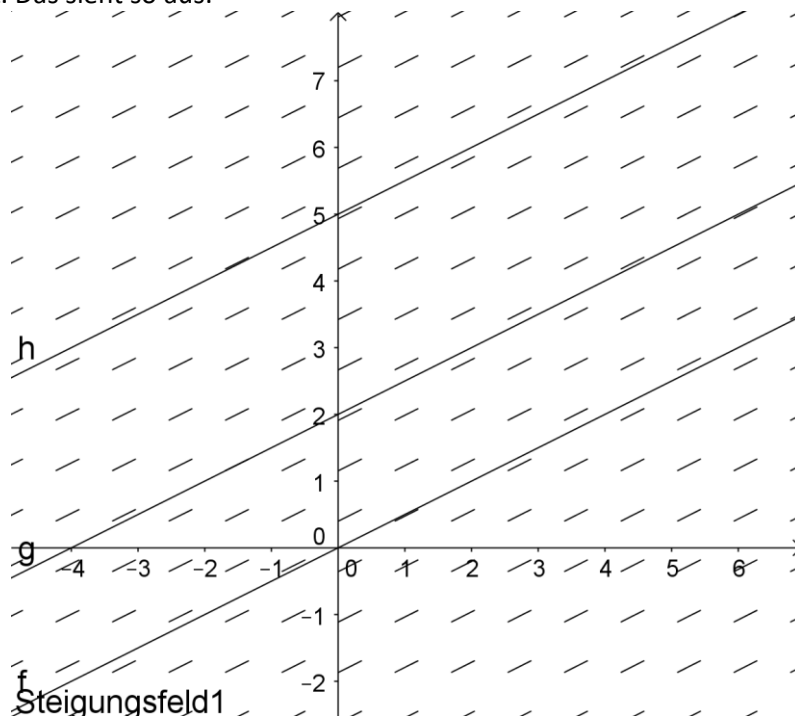
- Zuerst schreibt man die Gleichung anders an: $y_{n+1} - y_n = 5$.
- Dann verändert man die linke Seite zu: $\frac{y_{n+1} - y_n}{(n+1) - n} = \frac{\Delta y}{\Delta n}$
(Differenz der Folgenglieder dividiert durch die Differenz der Indizes, die hier 1 ist)
- Nun kann man diese Darstellung durch den Grenzübergang $\Delta n \rightarrow 0$ (Δn geht gegen Null) in den kontinuierlichen Fall überführen:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta n} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad (\text{hier wird aus } n \text{ die Variable } x \text{ oder } t)$$

Die Lösung der Differenzialgleichung $y' = k$ ergibt durch Integration ($\int y' \cdot dx = \int k \cdot dx$) die Funktion $y = k \cdot x + d$, die wir als lineare Funktion kennen. Mit $k = 0,5$ und dem Anfangswert $y(0) = 0$ ergibt sich $y(x) = 0,5 \cdot x$

Richtungsfeld:

Die Differenzialgleichung $y' = 0,5$ kann man so interpretieren, dass zu jedem Paar (x, y) die Steigung $y' = 0,5$ zugeordnet wird. Das ergibt für jeden Gitterpunkt der Ebene einen kleinen Strich, der die Steigung angibt. Das sieht so aus:



Daraus ergibt sich, dass die Lösungen der Differenzialgleichung die Geraden $y = 0,5x + d$ sein müssen. 3 davon wurden eingezeichnet.

Das Richtungsfeld kann eine gute Hilfe sein für das Erraten der Lösung einer Differenzialgleichung.

**Lösung einer Differenzialgleichung 1.Ordnung (nur y' und y und x sind vorhanden) durch die
Methode: TRENNEN DER VARIABLEN**

Beispiel 2:

Die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ lässt sich auf folgende Art lösen:

- Zuerst wird die Leibnitz-Schreibweise angewandt: $y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
- dann bringt man die y -Terme nach links und die x -Terme nach rechts (mal dx und durch y)
das ergibt: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$
- nun wird integriert: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C$
- und ent-logarithmiert: $\rightarrow y = e^{\ln|x| + C}$
- und umgeformt mit der Potenzregel $\rightarrow y = e^{\ln|x|} \cdot e^C = k \cdot x$ ($e^C = k$ und $e^{\ln|x|} = x$)

Die Lösung sind also Geraden durch den Ursprung mit einer beliebigen Steigung k

Beispiel 3:

Die Differenzialgleichung $y' = \frac{y}{10}$ (Die **Steigung** in jedem Punkt ist ein Zehntel des dortigen y -Werts bzw. die **momentane Änderungsrate** der y -Werte ist $1/10$ der y -Werte) lässt sich ebenso mit der TRENNUNG DER VARIABLEN lösen:

- Zuerst kommt die Leibnitz-Schreibweise: $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{10}$
- dann bringt man die y -Terme nach links und die x -Terme nach rechts (mal dx und durch y)
das ergibt: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{10}$
- nun wird integriert: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{10} \rightarrow \ln |y| = \frac{x}{10} + C$
- und ent-logarithmiert: $\rightarrow y = e^{\frac{x}{10} + C}$
- und umgeformt mit der Potenzregel $\rightarrow y = e^{x/10} \cdot e^C = k \cdot e^{x/10}$ ($e^C = k$)

Die **allgemeine Lösung** ist also eine Exponentialfunktion, die für das exponentielle Wachstum steht – mit ca. $1/10 = 10\%$ momentaner Zunahme, wobei die Konstante k noch beliebig gewählt werden kann. [Die Steigerung pro Zeiteinheit ergibt sich aus $e^{0.1} = 1,105 = 1 + p/100 \rightarrow p = 10,5\%$]

Beispiel 4:

Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' = 0,1 \cdot y$ mit der **Anfangsbedingung** $y(0) = 1000$ (die stündlichen Zuwächse von Bakterien sollen ca. 10% betragen, angefangen von 1000 Bakterien)

Lösung:

Mit der TRENNUNG DER VARIABLEN wie im Beispiel 3 kommt man auf die Gleichung der allgemeinen Lösung: $y = k \cdot e^{x/10}$.

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung entsteht die **spezielle Lösung**: $y = 1000 \cdot e^{x/10}$

Übungen:

Lösen Sie die folgenden Differenzialgleichungen mit TRENNEN DER VARIABLEN und machen Sie eine Skizze der Funktion (mit Unterstützung durch das Richtungsfeld)

1) $y' = 2$

2) $y' = 2y$

3) $y' = y^2$

4) $y' = -x \cdot y$

5) $y' = \frac{x}{y}$

6) $y' = \frac{y}{x^2}$

7) $y' = -0,2 \cdot (y - 100)$ (beschränktes Grenzwachstum auf $K=100$)

- 8) Eine Bevölkerung hat zu Beginn 2500 Personen Einwohner. Die jährliche Zunahme beträgt 100 Personen. Zeigen Sie, dass dadurch die Differenzialgleichung $y' = 100$ entsteht und lösen Sie diese.
- 9) Eine Bevölkerung hat zu Beginn 2500 Personen Einwohner. Die jährliche Zunahme beträgt 4%. Zeigen Sie, dass durch Lösung der Differenzialgleichung $y' = \ln(1,04) \cdot y$ die Exponentialfunktion $y(t) = 2500 \cdot 1,04^t$ entsteht.
- 10) Das **Wachstum auf eine Grenze** zu nennt man auch beschränktes exponentielles Wachstum. Die momentane Änderungsrate ist dabei $y' = a \cdot (G - y)$ mit der Grenzgröße G , auf die das Wachstum hinsteuert, mit der Geschwindigkeit, die durch a modelliert wird.
Bestimmen Sie für die Angabe: Ein Baum hat zum Zeitpunkt 0 die Höhe 1,2 Meter und nach 2 Jahren die Höhe 1,8 Meter. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung und mit den Angaben die Parameter a und G . Wie groß wird der Baum in 20 Jahren sein?
- 11) Das **Newton'sche Abkühlungsgesetz** $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$ [T ist die aktuelle Temperatur, T_U ist die Umgebungstemperatur, t ist die Zeit] beschreibt die Abkühlung oder Erwärmung von Gegenständen, die langfristig die Umgebungstemperatur erreichen. Ein makabres Beispiel ist dazu: Ein Mensch hat die Körpertemperatur von 37°C, stirbt und kühlt langsam auf Umgebungstemperatur von 20°C ab. Nach einer Stunde ist er um 1°C kühler geworden. Lösen Sie die Differenzialgleichung allgemein und erstellen Sie mit den Angabedaten die spezielle Temperaturfunktion. Wann wird der Körper die Temperatur 22°C erreicht haben?

Logistisches Wachstumsgesetz als Beispiel für die Notwendigkeit der Integrationsregeln:

Die Differenzialgleichung für das logistische Wachstumsgesetz ist $y' = a \cdot (G - y) \cdot y$. Die momentane Änderungsrate y' ist direkt proportional dem Abstand der momentanen Wachstumshöhe y von der Grenze G und direkt proportional der momentanen Wachstumshöhe y .
 a ist der Proportionalitätsfaktor, der die Geschwindigkeit des Wachstums bestimmt.

Wir werden zuerst die Differenzialgleichung allgemein lösen und die entstehende Funktion auf das Problem: Welt-Bevölkerungszahl am 1.1.2016 war 7,39 Milliarden Menschen und im Jahre 2000 waren es 6,13 Milliarden Menschen. Es wird erwartet, dass wir auf etwa maximal 11 Milliarden Menschen anwachsen. Wie viele Menschen werden es mit logistischem Wachstum im Jahre 2030 sein?

Lösung:

Differenzialgleichung mit Leibniz-Schreibweise: $\rightarrow \frac{dy}{dx} = a \cdot (G - y) \cdot y$

Trennen der Variablen: $\frac{dy}{(G - y) \cdot y} = a \cdot dx$

Integration: $\int \frac{dy}{(G - y) \cdot y} = \int a \cdot dx$

Nebenrechnung: Partialbruchzerlegung des linken Bruchs:

$$\frac{1}{(G - y) \cdot y} = \frac{A}{(G - y)} + \frac{B}{y}$$

mal gemeinsamen Nenner $\rightarrow 1 = A \cdot (y) + B \cdot (G - y)$

$$y = 0 \rightarrow 1 = A \cdot 0 + B \cdot (G - 0) \rightarrow B = 1/G$$

$$y = G \rightarrow 1 = A \cdot G + B \cdot (G - G) \rightarrow A = 1/G$$

$$\frac{1}{(G - y) \cdot y} = \frac{1/G}{(G - y)} + \frac{1/G}{y}$$

$$\int \frac{1/G}{(G - y)} + \frac{1/G}{y} = \int a \cdot dx$$

$$-1/G \cdot \ln |G - y| + 1/G \cdot \ln |y| = a \cdot x + C$$

multipliziert mit G und Zusammenfassen der Logarithmen ergibt: $\ln\left(\frac{y}{G - y}\right) = aGx + C_1$

ent-logarithmieren ergibt: $\frac{y}{G - y} = e^{aGx} \cdot C_2$

mit $(G - y)$ ausmultipliziert ergibt: $y = G \cdot e^{aGx} \cdot C_2 - y \cdot e^{aGx} \cdot C_2$

auf y zusammengefasst ergibt: $y \cdot (1 + e^{aGx} \cdot C_2) = G \cdot e^{aGx} \cdot C_2 \rightarrow y = \frac{G \cdot e^{aGx} \cdot C_2}{(1 + e^{aGx} \cdot C_2)}$

dividiert man durch e^{aGx} , so ergibt sich: $y = \frac{G \cdot C_2}{(C_2 + e^{-aGx})}$

Mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ergibt sich:

$$y(x) = \frac{G \cdot y_0}{y_0 + (G - y_0) \cdot e^{-aGx}} \quad \text{Logistisches Wachstum mit Startwert } y_0, \text{ Grenzwert } G \text{ und } a$$

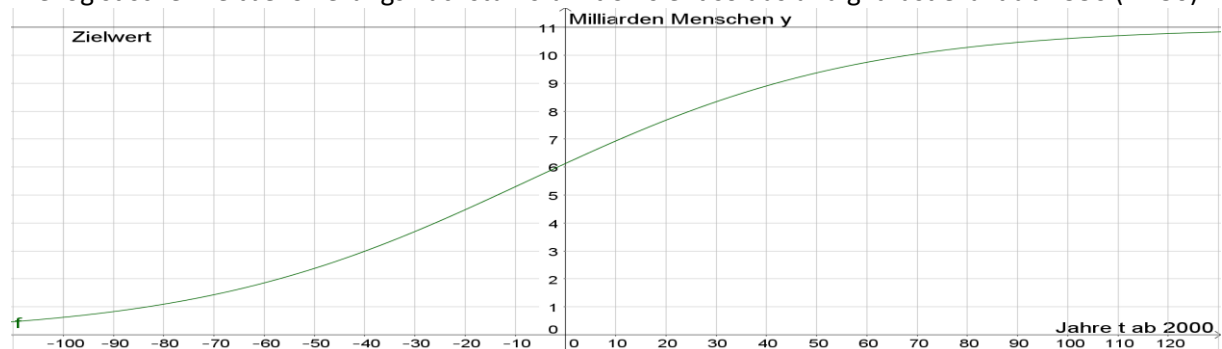
Mit dieser Funktion lässt sich das Weltbevölkerungswachstum so einfangen:

für 2000 gilt: $t=0$ $y(0) = y_0 = 6,13$ $y(16) = y = 7,39$ $G = 11$	$7,39 = \frac{11 \cdot 6,13}{6,13 + (11 - 6,13) \cdot e^{-a \cdot 11 \cdot 16}} \rightarrow a = 0,002763$
---	---

Damit lässt sich berechnen:

$$y(30) = \frac{11 \cdot 6,13}{6,13 + (11 - 6,13) \cdot e^{-a \cdot 11 \cdot 30}} = 8,34 \text{ Milliarden Menschen im Jahre 2030}$$

Die logistische Weltbevölkerungswachstumsfunktion sieht so aus und gilt fast exakt ab 1950 (= -50)



Differenzialgleichung 2. Ordnung

Aus der Kraftgleichung für die Federkraft: $F = -k \cdot y \rightarrow$ **Schwingungsgleichung**

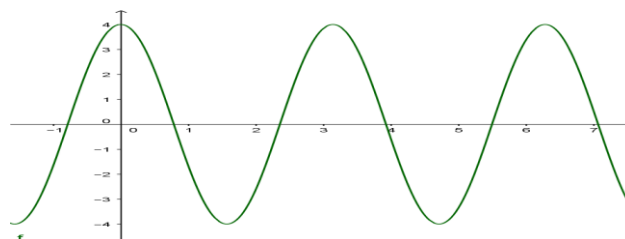
(k ist die Federkonstante, $\Delta y = y$ die Auslenkung von der Ruhelage) lässt sich die Differenzialgleichung 2. Ordnung herleiten: $m \cdot y'' = -k \cdot y$ (Kraft F = Masse m mal Beschleunigung y'')

Diese Differenzialgleichung löst man mit dem **unbestimmten Ansatz**: $y = A \cdot e^{\lambda t}$

und bekommt eine komplexe Lösung, die man in die Form $y = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + B \cdot \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$ bringt

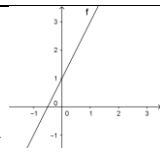
Die zwei Parameter A und B kann man durch die Anfangsbedingungen $y(0)=\dots$ und $y'(0)=\dots$ in die spezielle Lösungsform bringen.

Beispiel: $m=20$, $k=5$, $y(0)=4$ und $y'(0)=0 \rightarrow y(t) = 4 \cdot \cos(2t)$



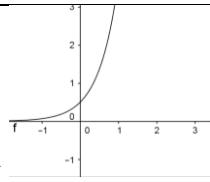
Lösungen:

1) $\int dy = \int 2 dx \rightarrow y = 2x + C$



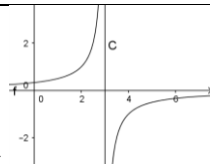
lineare Funktion

2) $\int dy/y = \int 2 dx \rightarrow y = C \cdot e^{2x}$



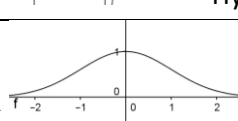
exponentielle Funktion

3) $\int dy/y^2 = \int dx \rightarrow y = -\frac{1}{x+C}$



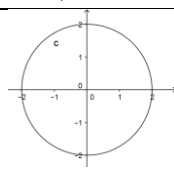
Hyperbel

4) $\int dy/y = -\int x \cdot dx \rightarrow y = C \cdot e^{-x^2/2}$



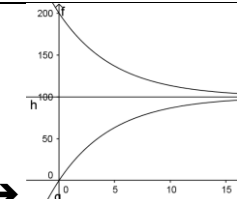
Gauß'sche Normalverteilung

5) $\int y \cdot dy = -\int x \cdot dx \rightarrow y^2/2 = -x^2/2 + C \rightarrow$



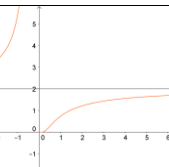
Kreis

6) $\int \frac{dy}{y-100} = \int -0,2 \cdot dx \rightarrow y = 100 + C \cdot e^{-0,2 \cdot x}$



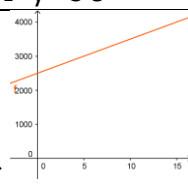
Beschränktes Wachstum gegen 100 von oben oder unten

7) $\int dy/y = \int 1/x^2 \cdot dx \rightarrow y = C \cdot e^{-1/x}$



Beschränktes Wachstum gegen C (hier C=2)

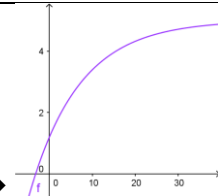
8) $y = 100x + 2500 \rightarrow$



lineares Wachstum

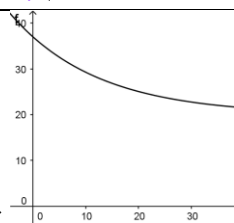
9) $\int dy/y = \int \ln(1,04) \cdot dx \rightarrow y = 2500 \cdot 1,04^x$

10) $y = 5 - 3,8 \cdot e^{-0,085925 \cdot t}$



$y(20) = 4,3 \text{ m}$

11) $T = 20 + 17 \cdot e^{-0,060625 \cdot t}$



Grenzwachstum auf 20°C,
nach 35 Std. sind 22°C erreicht