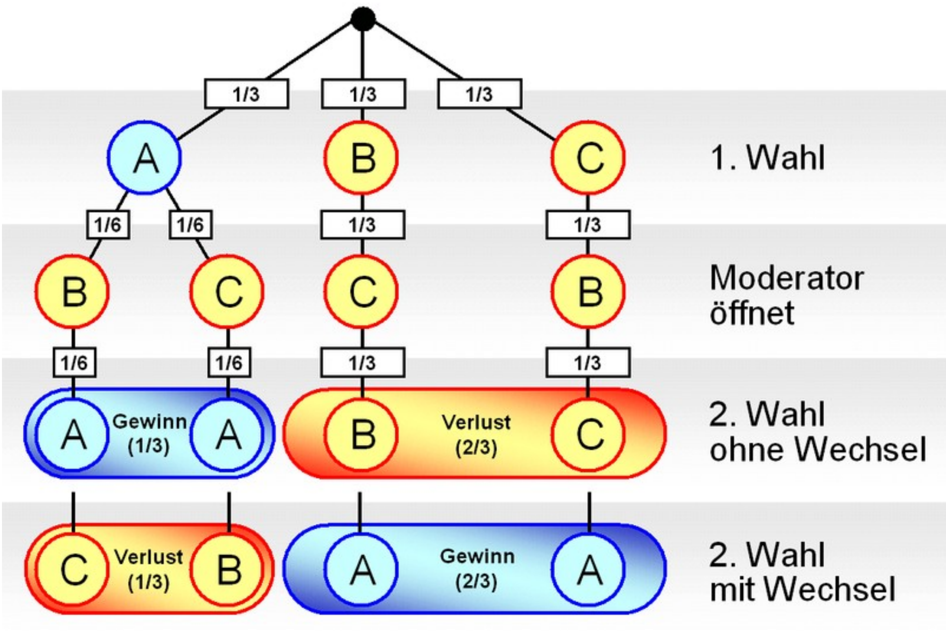
Erich Fried Realgymnasium

Fachbereichsarbeit aus Mathematik:

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die Lösung des Ziegenproblems



Verfasst von:

Markus Gurtner

Klasse: 8.B

Schuljahr 2006/2007

Abgabe: 13.02.2007

Betreut durch Mag. Christine BAC

Ein Soziologe, ein Physiker und ein Mathematiker fahren mit dem Zug nach Paris. Als sie die Grenze nach Frankreich überqueren, sehen sie zwei schwarze Schafe. <<Oh>>, staunt der Soziologe, <<in Frankreich sind die Schafe ja schwarz!>> Der Physiker lächelt nachsichtig und korrigiert: <<Na, sagen wir lieber: In Frankreich sind mindestens zwei Schafe schwarz.>> Daraufhin der Mathematiker: <<Genau genommen können Sie nur sagen, in Frankreich sind mindestens zwei Schafe auf jeweils mindestens einer Seite schwarz.>>

[von Randow, 2006. S.67]

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

Ich entschied mich ziemlich früh, eine Fachbereichsarbeit zu schreiben, obwohl mir von mehreren Seiten abgeraten wurde. Der meist genannte Einwand lautete, dass es zu stressig wäre. Selbstbewusst entschied ich, diese Warnungen zu ignorieren. Mir war relativ klar, dass ich die Fachbereichsarbeit in Mathematik schreiben würde. Ich war schon immer gut in diesem Fach. Darüber hinaus unterrichtet mein Vater Mathematik und ich wusste, dass er eine ausgezeichnete Informationsquelle ist. Ein Themengebiet zu finden, welches mir nicht zu trocken war und weder zu viel noch zu wenig Inhalt zum Schreiben bot, stellte sich als eine große Hürde heraus. Ich suchte lange nach einem guten Thema, bis ich die Suche aus Frustration abbrach. Wenige Wochen später fragte mich mein Vater im Vorbeigehen, ob ich denn das Ziegenproblem kenne. Er nannte mir die Aufgabe, und mir war sofort klar, dass *das* das Thema meiner Fachbereichsarbeit wird. Als nächsten Schritt erweiterte ich noch das Themengebiet auf die bedingten Wahrscheinlichkeiten, die für die mathematische Lösung des Ziegenproblems benötigt werden. Nun konnte ich anfangen zu schreiben.

2. Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der bedingten Wahrscheinlichkeit und deren Anwendungsmöglichkeiten, insbesondere dem Ziegenproblem. Einem kurzen Blick auf die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die ihre Anfänge im 17. Jahrhundert hatte, folgen mehrere Beispiele. Mathematik ist am einfachsten anhand von Beispielen zu erklären. Anschließend sind alle zuvor verwendeten Formeln in einer Formelsammlung zusammengefasst. Um die praktische Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit aufzuzeigen, handelt ein ganzes Kapitel über ein aktuelles Thema, der DNA-Analyse. Die zweite Hälfte der Arbeit beschäftigt sich mit dem Ziegenproblem. Dabei handelt es sich um eine Denksportaufgabe, deren Problemstellung aus einer Spielshow stammt. Sie war in den 90er Jahren an eine amerikanische Journalistin gestellt worden. Über die Lösung des Ziegenproblems stritten sich zahlreiche Fachleute. Diese Denksportaufgabe schlug überraschend große Wellen. Die restlichen Kapitel beinhalten die Lösung des Ziegenproblems und Argumente gegen diese Lösung. Diese Argumente werden allerdings gleich wieder widerlegt.

3. Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie fand ihre Anfänge in Frankreich. Der Philosoph und Literat *Chevalier de Méré* (1607-1684) stellte im Jahr 1654 dem Mathematiker *Blaise Pascal* (1623-1662) zwei Fragen über die Wahrscheinlichkeit bei Glücksspielen. Daraufhin beschäftigten sich sowohl Pascal als auch der Mathematiker *Pierre Fermat* (1601-1655) mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
[Bürger, Fischer & Malle, 1980. S.239 bzw.
http://de.wikipedia.org/wiki/Chevalier_de_Mere]

Das erste bekannte Buch, das sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt, wurde im Jahr 1657 vom niederländischen Naturwissenschaftler *Christiaan Huygens* (1629-1695) verfasst. Es trug den Titel „*De Ratiociniis in Aleæ Ludo*" (über Berechnungen beim Würfelspiel) Es handelt von Fragen, die bei einem Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat aufkamen.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens]

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine Theorie der Glücksspiele. Doch bald darauf erkannten Versicherungsgesellschaften ihren praktischen Nutzen und begannen sie für die Berechnung von diversen Unfallswahrscheinlichkeiten zu verwenden.
[Bürger, Fischer & Malle, 1980. S.239]

Wichtige Fortschritte in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind dem Schweizer Mathematiker *Jakob Bernoulli* (1655-1705) zuzuschreiben. Sein Hauptverdienst ist wohl der Satz von Bernoulli, auch das Gesetz der großen Zahlen genannt.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli]

„Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich die relative Häufigkeit eines Zufallsergebnisses immer weiter an die theoretische Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis annähert, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird."
[http://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_der_gro%C3%9Fen_Zahl]

Den nächsten großen Fortschritt brachte *Simon Pierre de Laplace* (1749-1827), der in seinem 1812 veröffentlichten Buch als erster eine Definition der Wahrscheinlichkeit gab. Sein Werk stellte eine Widerlegung der damals anerkannten These dar, dass eine strenge mathematische Behandlung der Wahrscheinlichkeit nicht möglich sei.
[http://de.wikipedia.org/wiki/Laplace]

Ein Aufschwung der Wahrscheinlichkeitsrechnung setzte zu Beginn des 19. Jahrhunderts ein, angeregt vor allem durch unterschiedliche naturwissenschaftliche Fragestellungen sowie Anwendungen in der Physik. So berechnete der österreichische Physiker *Ludwig Eduard Boltzmann* (1844-1906) die Wahrscheinlichkeiten der Geschwindigkeiten von Gasmolekülen. Weiters legte der britische Mathematiker *Karl Pearson* (1857-1936) den Grundstein für die mathematische Statistik.
[Bürger, Fischer & Malle, 1980. S.239 bzw. http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson]

Allerdings gab es bis zum 20. Jahrhundert keine präzise Grundlage für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1899 erklärte der deutsche Mathematiker *David Hilbert* (1862-1943) dieses Fehlen einer Grundlage als eines der wichtigsten ungelösten mathematischen Probleme. Als Lösung des von Hilbert formulierten Problems wird heute die 1933 veröffentlichte Wahrscheinlichkeitsdefinition des russischen Mathematikers *Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow* (1903-1987) angesehen.
[Bürger, Fischer & Malle, 1980. S.239 bzw. http://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert bzw. http://de.wikipedia.org/wiki/Kolmogorow]

Axiomensystem (Lehrsätze) von Andrej N. Kolmogorow:

1) Jedem beliebige Ereignis A aus einer Menge von möglichen Ereignissen kann eine positive reelle Zahl als Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
2) Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.
3) Die Wahrscheinlichkeit, dass entweder das eine oder das andere von zwei unabhängigen Ereignissen eintritt, entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

4. Die bedingte Wahrscheinlichkeit

„Bedingte Wahrscheinlichkeit ... ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass ein Ereignis B bereits vorher eingetreten ist. Es wird geschrieben als P(A|B), der senkrechte Strich ist als "unter der Voraussetzung" zu lesen...“

[http://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit]

4.1 Einführungsbeispiel

Die Arbeiter einer Firma werden nach zwei Merkmalen aufgeteilt, nach ihrem Geschlecht und ob sie rauchen:

	Raucher A	Nichtraucher	Ω
Frauen B	200	300	500
Männer	800	200	1000
	1000	500	1500

[Tab. v. Verf., Zahlen von Engel, 1973. S.139]

A = die Menge der Raucher

B = die Menge der Frauen

Ω = die Menge der Angestellten

Die Anteile der Raucher: $P(A) = |A| / |\Omega| = 1000/1500 = 2/3 \Rightarrow 66{,}67\%$

Die Anteile der Frauen: $P(B) = |B| / |\Omega| = 500/1500 = 1/3 \Rightarrow 33{,}33\%$

Die Anteile der rauchenden Frauen: $P(A \cap B) = 200/1500 = 2/15 \Rightarrow 13{,}33\%$

[Engel, 1973. S.139]

Wenn wir nun die Rauchgewohnheiten der Frauen untersuchen wollen, dann ignorieren wir die Männer, dadurch bildet sich die neue Menge B (alle Frauen). Diese neu gebildete Menge stellt das zuvor eingetretene Ereignis dar, das die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert.

[Engel, 1973. S.139]

Die folgende Rechnung ermittelt die Wahrscheinlichkeit, zufällig aus der Menge der Frauen (B), eine Raucherin (A) auszuwählen. Dies wird angeschrieben mit $P(A \mid B)$:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{Anteil der rauchenden Frauen}}{\text{Anteil der Frauen}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/15}{1/3} = 2/5 \Rightarrow 40\%$$

[Engel, 1973. S.139]

Die Wahrscheinlichkeit, unter dem zuvor eingegrenzten Bereich aller Frauen eine Raucherin auszuwählen, beträgt 40%.
[Engel, 1973. S.139]

Diese Formel verwendet Wahrscheinlichkeitswerte und ist eine Verallgemeinerung eines eigentlich einfachen Rechenganges. Wenn nun die rauchenden Frauen (200 oder 33,33%) durch die angestellten Frauen (500 oder 13,33%) dividiert werden ($^{200}/_{500}$ = 2/5 oder $^{13,33}/_{33,33}$ % = 40%), dann wird dasselbe Ergebnis erzielt.
[pers. Gesp. Dr. Gurtner, 2006]

Allerdings sind öfters nur Wahrscheinlichkeitswerte gegeben und konkrete Zahlen sind unbekannt. Diese werden in der Regel durch langjährige Erfahrungen, Schätzungen oder Untersuchungen aus einem ähnlichen Umfeld (z.B.: Erfassung eines landesweiten Rauchverhaltens) gewonnen.
[pers. Gesp. Dr. Gurtner, 2006]

4.2 Übungsbeispiel

Dem „Statistischen Jahrbuch für die Republik Österreich 1996“ ist zu entnehmen, dass im Schuljahr 1995/96 insgesamt 106 587 Personen eine berufsbildende höhere Schule besucht haben.
[Steiner & Weilharter, 2004. S.53]

	männlich	weiblich	gesamt
HTL	36 052	3 251	39 303
andere BHS	20 026	47 258	67 284
BHS	56 078	50 509	106 587

[Tab. v. Verf., Zahlen von Steiner & Weilharter, 2004. S.53]

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Personenkreis einen männlichen BHS-Schüler auszuwählen, wenn man nur unter den HTL-Schülern des Schuljahres 1995/96 sucht?
Es ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A „Schüler ist männlich“ unter der Voraussetzung B „Schüler besuchte 1995/97 eine HTL“ zu errechnen.
[Steiner & Weilharter. 2004. S.53]

$$P(B) = \frac{\text{HTL - Schüler}}{\text{alle Schüler}} = \frac{39\,303}{106\,587} = 0{,}3687 \Rightarrow 36{,}87\%$$

[Engel, 1973. S.139]

$$P(A \cap B) = \frac{\text{männliche HTL - Schüler}}{\text{alle Schüler}} = \frac{36\,052}{106\,587} = 0{,}3382 \Rightarrow 33{,}82\%$$

[Engel, 1973. S.139]

Nun können wir die allgemeine Formel verwenden:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3382}{0{,}3687} = 0{,}9173 \Rightarrow 91{,}73\%$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, unter dem zuvor eingegrenzten Bereich von HTL-Schülern einen männlichen Schüler auszuwählen, beträgt 91,73%.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter BHS-Schüler männlich und hat 1995/96 die HTL besucht?

   Diese Aufgabe klingt ähnlich wie Aufgabe a, aber nun ist die Wahrscheinlichkeit gefragt, dass beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden und nicht nacheinander. Gesucht ist $P(A \cap B)$.

   [Steiner & Weilharter, 2004. S.53]

Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 0{,}9172 \cdot 0{,}3687 = 0{,}3382 \Rightarrow 33{,}82\%$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter BHS-Schüler sowohl eine HTL besucht hat als auch männlich ist, beträgt 33,82%

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Schüler ausgewählt, der männlich ist oder 1995/96 die HTL besucht hat?

   Nun müssen die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten zweier sich ausschließender Ereignisse addiert werden. Dafür benötigen wir zuerst die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Auswählen eines männlichen Schülers.

   [vgl. Steiner & Weilharter, 2004. S. 53]

$$P(A) = \frac{\text{männliche Schüler}}{\text{alle Schüler}} = \frac{56\,078}{106\,587} = 0{,}5261 \Rightarrow 52{,}61\%$$

[Engel, 1973. S.139]

Nun verfügen wir über alle Werte, um den Additionssatz zu benützen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5261 + 0{,}3687 - 0{,}3382 = 0{,}5566 \Rightarrow 55{,}66\%$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.50]

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig ein BHS-Schüler ausgewählt wird, der entweder männlich oder ein HTL-Schüler ist, beträgt 55,66%.

5. Die Bayes-Formel

Die Bayes-Formel ist am einfachsten anhand eines Beispiels zu erklären. Wir führen ein Zufallsexperiment durch, bei dem sich jedes Ergebnis in eine zuvor festgelegte Klasse einordnen lässt. Diese Klassen werden als B1, B2 usw. bezeichnet, je nachdem wie viele Klassen es gibt.
[Behrends, 2006. S.35]

Nehmen wir zum Beispiel einen Würfelwurf (die Klassen dürfen sich nicht überlappen):
B1 = 1 oder 2 gewürfelt
B2 = 3 oder 4 gewürfelt
B3 = 5 oder 6 gewürfelt
[Behrends, 2006. S.35]

Nun wird gewürfelt und wir erhalten ein beliebiges Ergebnis, genannt A. Da uns die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$ und $P(A|B_3)$ und deren Wahrscheinlichkeiten $P(B_1)$, $P(B_2)$ und $P(B_3)$ bekannt sind, können wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten mit der Bayes-Formel <<umkehren>> und damit $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ und $P(B_3|A)$ berechnen.
[Behrends, 2006. S.35]

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

[Behrends, 200. S.35]

$$P(B_2/A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

[Behrends, 2006. S.35]

$$P(B_3/A) = \frac{P(A/B_3)P(B_3)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

[Behrends, 2006. S.36]

Führen wir nun eine Beispielrechnung durch mit der Information <<die gewürfelte Zahl ist größer als 3>>. Damit ergeben sich folgende Zahlen für die bedingte Wahrscheinlichkeit:

$P(A|B_1) = 0$ => Da B_1 nur die Zahlen 1 und 2 einschließt.
$P(A|B_2) = {}^1/_2$ => Weil von den Zahlen 3 und 4 in B_2 nur die Zahl 4 in A enthalten ist.
$P(A|B_3) = 1$ => Sowohl die Zahl 5 als auch die Zahl 6 aus B_3 sind in A enthalten.
[Behrends, 2006. S.36]

Nun wollen wir errechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die gewürfelte Zahl in B_2 befindet.

$$P(B_2|A) = \frac{P(A/B_2)P(B_2)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{(1/2)\cdot(1/3)}{0\cdot(1/3) + (1/2)\cdot(1/3) + 1\cdot(1/3)} = {}^1/_3$$

[Behrends, 2006. S.36]

Analog dazu ergibt sich für $P(B_1|A) = 0$ und $P(B_3|A) = {}^2/_3$.
[Behrends, 2006. S.36]

Eine praktische Anwendung finden diese Formeln beispielsweise in der Industrie. Wenn es eine fehlerhafte Türfüllung in einem Automobilwerk gibt, und der Werkstattmeister die Maschine herausfinden will, welche am wahrscheinlichsten den Fehler verursacht hat, ist es äußerst sinnvoll diese Formeln zu benützen.
[von Randow, 2006. S.139]

6. Formelsammlung

6.1 Allgemeine Formel

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

- $P(A \mid B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung B, wenn A und B beliebige Ereignisse sind.

- $P(A \cap B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam auftreten.

- P(B) ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis B eintritt.
  [Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

Wenn zwei Ereignisse A und B nicht gleichzeitig eintreten können, gilt $P(A \cap B) = 0$. In diesem Fall liegen einander ausschließende Ereignisse vor.
[Steiner & Weilharter, 2004. S.50]

6.2 Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse

Durch Umformen der allgemeinen Formel ergibt sich der Multiplikationssatz, mit welchem die Wahrscheinlichkeit, dass A und B gemeinsam auftreten, berechnet werden kann:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)}$$

bzw.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)}$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S. 51]

6.3 Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse

Ein Sonderfall tritt auf, sobald A und B jedoch stochastisch unabhängig (nicht voneinander abhängig) sind (zum Beispiel zwei Würfe einer Münze). Das erste Ereignis hat auf das zweite Ereignis keinerlei Einfluss:
[http://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit]

$P(A \mid B) = P(A)$ *bzw.* $P(B \mid A) = P(B)$
[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

- $P(A \mid B)$ bzw. $P(B \mid A)$ ist lediglich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der beiden Ereignisse.
  [Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

Wenn nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten beider Ereignisse errechnet werden soll, müssen deren Wahrscheinlichkeiten für ein Eintreten multipliziert werden:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.51]

6.4 Additionssatz

„Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von einem von zwei Ereignissen ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten des Eintretens der einzelnen Ereignissse [sic!], verringert um die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten. Dieser Zusammenhang wird Additionssatz genannt"
[Steiner & Weilharter, 2004. S.50]

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

[Steiner & Weilharter, 2004. S.50]

- $P(A \cup B)$ bedeutet, dass Ereignis A oder Ereignis B eintreten wird.
  [Steiner & Weilharter, 2004. S.50]

6.5 Bayes-Formel

Die Bayes-Formel kehrt die bedingten Wahrscheinlichkeiten quasi um. Die Fragestellung lässt sich leicht aus dem alltäglichen Leben herleiten:

„Angenommen, Sie stellen nach dem Besuch Ihrer Freunde fest, dass Ihre Lieblings-DVD verschwunden ist. Sie wissen, dass Ihre Freunde eine unterschiedliche Tendenz haben, Sachen ohne zu fragen einfach „auszuborgen“. Wen sollten Sie nun verdächtigen?“
[Behrends, 2006. S.35]

$$\boxed{P(B_i / A) = \frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A/B_1)P(B_1) + \ldots + P(A/B_n)P(B_n)}}$$

[Behrends, 2006. S.36]

Dies ist die allgemeine Formel, die für beliebig viele Klassen, welche durch die Variable *n* gekennzeichnet sind, konzipiert ist. Für die Variable *i* können die Zahlen 1 bis *n* eingesetzt werden.
[Behrends, 2006. S.36]

7. Die praktische Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Dem folgenden Beispiel über die situationsbedingte Interpretation des genetischen Fingerabdrucks liegt die bedingte Wahrscheinlichkeit zu Grunde. Dazu wäre noch wissenswert:

In den meisten forensischen Fällen liegt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen den identischen DNA-Fingerprint aufweisen, zwischen 1:100 000 und 1:1 Milliarde. Die genaue Zahl hängt von der Anzahl der verglichenen Marker ab und von der Häufigkeit dieser Marker in der Population.
[Campbell & Reece, 2003. S.463]

Auf der ersten Jahrestagung der deutschen Gesellschaft für Kriminalistik in der Führungsakademie der Polizei in Münster-Hiltrup im August 2004 wurde folgender Fall zum Thema DNA-Analyse vorgebracht:

Sarah wurde missbraucht und erwürgt hinter einer dichten Hecke gefunden. Der DNA-Test des Spermas ergibt Übereinstimmung mit der DNA von Peter S. Die Wahrscheinlichkeit für eine zufällige Übereinstimmung beträgt $^{1}/_{1\,000\,000}$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Peter S. der Täter?
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.47]

Die Teilnehmer wurden gebeten eine von 5 mögliche Antworten zu wählen:

- 100%
- ca.99%
- ca. 50%
- 0%
- alles ist möglich

[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.47]

Bis auf 0% wurden alle Antworten genannt, wobei 99% die am häufigsten gewählte war. Nach der Abstimmung wurde den überraschten Teilnehmern erklärt, dass alle Antworten richtig seien, allerdings die Antwort <<alles ist möglich>> damit richtiger sei als die anderen. Beck-Bornholdt & Dubben konstruierten mehrere Szenarios um ihre Ausführung zu begründen. Da nur wenige Informationen vorlagen, war dies sehr einfach. Es wurde nicht erwähnt, ob der Täter und das Opfer in derselben Stadt oder auch nur in demselben Land lebten, sich kannten, wann die Tat geschah oder wie viele potenzielle Täter es überhaupt gibt.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.47f]

Dem in diesen Szenarios verwendeten DNA-Tests liegt eine Wahrscheinlichkeit, dass der DNA-Fingerprint zweier Personen als identisch angegeben wird, von 1:1 Million zugrunde. Diese liegt zwischen den von Campbell und Reece angegebenen Grenzwerten von 1:100 000 und 1:1 Milliarde.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.47 bzw. Campbell & Reece, 2003. S.463]

Mordfall 1 (100%)

Der Mord wurde auf einer Hallig (Insel im Wattenmeer) verübt, und darüber hinaus ist Peter S. Sarahs Nachbar. Er ist sogar wegen mehreren Sexualdelikten vorbestraft. Während der Tatzeit befanden sich nachweislich nur zwei weitere Männer auf der Hallig. Deren DNA passte nicht mit dem gefundenen Sperma überein.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.48]

Mordfall 2 (ca. 99%)

Der Mord geschah auf der Ostfriesischen Insel Juist, auf der sich zur Tatzeit nachweislich 1227 auf das Täterprofil passende Männer aufhielten. Davon wurden 227 getestet und die DNA von Peter S. hatte die einzige Übereinstimmung. Es gibt also noch 1000 weitere potenzielle Tatverdächtige. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer von diesen denselben DNA-Fingerprint aufweist wie Peter S., liegt bei $^{1000} / _{1\,000\,000} = 0{,}001$ beziehungsweise 0,1%.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.50]

Mordfall 3 (ca. 50%)

Der Mord fand in Neuseeland statt. Dort gibt es rund eine Million Tatverdächtige. Peter S. und Sarah wohnten weder in derselben Stadt, noch kannten sie sich. Bei einer Million Menschen wird es im Durchschnitt etwa einen geben, der denselben DNA-Fingerprint hat wie Peter S. Neben ihm gibt es also noch einen Unbekannten, der die Tat begangen haben könnte.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.49]

Mordfall 4 (0%)

Der Mord ereignete sich in München. Die mit dem Sperma übereinstimmenden DNA-Daten von Peter S. stammen aus dem Bundeskriminalamt. München hat ca. 1,3 Millionen Einwohner, wovon etwa 300 000 auf das Täterprofil passen. Die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer von diesen denselben DNA-Fingerprint wie Peter S. aufweist, beträgt nur $^{300\,000}/_{1\,000\,000} = 0{,}3$ oder 30%. Es könnte also noch einen weiteren unbekannten Tatverdächtigen geben, der einen passenden DNA-Fingerprint aufweist, auch wenn es sehr unwahrscheinlich ist. Nach Peter S. wird als Täter gefahndet. Allerdings war dieser zur Tatzeit bereits verstorben und beerdigt.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.48]

7.1 Die Aussagekraft des DNA-Tests

Und wenn nun eine europaweite Fahndung durchgeführt wurde? Die EU hat ca. 400 Millionen Bürger. Davon sind ca. die Hälfte Männer und davon wiederum die Hälfte dürfte das richtige Alter haben. Folglich gibt es rund 100 Millionen potenzielle Täter. Wenn jeder Ein-Millionste denselben DNA-Fingerprint hat, gibt es rund 100 mögliche Täter neben Peter S. Die Wahrscheinlichkeit, dass es dieser war, beträgt dann lediglich 1%. Diese Überlegung zeigt auf, wie wenig Gewicht eine DNA-Analyse alleine hat.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.50]

Interessant ist, dass das Bundesverfassungsgericht in Deutschland entschieden hat, dass Ergebnisse einer DNA-Analyse alleine nicht als ausreichendes Beweismaterial gelten.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.53]

8. Das Ziegenproblem

Anfang der 90er Jahre wurde der amerikanischen Journalistin Marilyn vos Savant von einem Leser ihrer Kolumne <<Fragen Sie Marilyn>> folgende Denksportaufgabe gestellt:

> *Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten <<Ich zeige Ihnen mal was>> öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Er fragt: <<Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie Nummer zwei? >>*
> *[von Randow, 2006. S.9]*

Zwei Türen, hinter denen entweder ein Auto und eine Ziege warten. Das bedeutet, dass es eigentlich gleich ist, welche Tür gewählt wird, oder? Frau Marilyn vos Savant, die laut Heinz Hartmann [2006, Kapitel 4.3.2] mit einem Intelligenzquotienten von 228 der intelligenteste Mensch der Welt ist, erklärte allerdings in ihrer Lösung, dass Wechseln vorteilhafter wäre.
[von Randow, 2006. S.9]

Daraufhin wurde Marilyn vos Savant von hämischen Leserbriefen überschüttet und sogar öffentlich verspottet. Dies geschah auf höchstem Niveau, da sich unter ihren Kritikern sowohl Doktoren der Mathematik und Statistik, als auch Professoren befanden, welche sich vehement gegen die Lösung der IQ-Weltmeisterin aussprachen. Zustimmende Leserpost war äußerst rar.
[von Randow, 2006. S.11]

Damit war das Ziegenproblem geboren.

Die Debatte über das Ziegenproblem nahm gewaltige Dimensionen an. Ehepaare stritten sich, Mathematik-Lehrer verwirrten ihre Schüler und Zeitungsredakteure erklärten sich gegenseitig für begriffsstutzig.
[von Randow, 2006. S.11]

> *Ich zitiere von Seite eins der* New York Times *(21.7.1991): <<Die Antwort, wonach die Mitspielerin die Tür wechseln solle, wurde in den Sitzungssälen der CIA und den Baracken der Golfkrieg-Piloten debattiert. Sie wurde von Mathematikern am Massachusetts Institute of Technology und von Programmierern am Los Alamos National Laboratory in New Mexico untersucht und in über tausend Schulklassen des Landes analysiert.>>*
> *[von Randow, 2006. S.11]*

Das Ziegenproblem war in aller Munde. Laut Beck-Bornholdt & Dubben [2005. S.101] war es im englischsprachigen Raum allerdings eher als *Monty Hall problem* bekannt. Monty Hall, Moderator einer Amerikanischen TV-Show, spielte nämlich eben die in der Aufgabe beschriebene Gewinnshow mit seinen Kandidaten.

In Deutschland machte das Ziegenproblem erst die Runde, nachdem Gero von Randow, ein Wissenschaftsjournalist, einen Artikel in der Wochenzeitung <<Die Zeit>> zu diesem Thema veröffentlichte. Gero von Randow ergriff Partei für Frau Marilyn und erklärte Wechseln ebenfalls als vorteilhafter. Auch er wurde in zahlreichen Briefen als Spinner oder Dummkopf beschimpft. Gero von Randow ist heute Redakteur der Hamburger Wochenzeitung <<Die Zeit>>.
[von Randow, 2006. S.2,11]

Wie kommt es, dass sich derart viele Menschen getäuscht haben, sogar einschlägig ausgebildete? Möglicherweise liegt es daran, dass viele Menschen dazu neigen, den leichtesten Weg zu gehen, die einfachere Lösung zu akzeptieren. Wissenschaftlich ist diese Denkweise als <<Ockhams Rasiermesser>> bekannt, die besagt, dass unter gleichwertigen Hypothesen die einfachste zu bevorzugen ist.
[von Randow, 2006. S.68]

8.1 Argumente für den Vorteil von Wechseln

Einer der wenigen Leser, der mit Gero von Randow übereinstimmte, schrieb ihm seine Begründung für die Richtigkeit von Frau Marilyns Lösung:

> *<<Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wagen hinter der erstgewählten Tür ist, beträgt $^1/_3$.*
> *Die Wahrscheinlichkeit, dass er hinter einer der beiden anderen Türen ist, beträgt somit $^2/_3$.*
> *Wenn ich nun erfahre, hinter welcher der beiden anderen Türen er nicht ist, weiß ich sofort die Tür, hinter der er mit einer Wahrscheinlichkeit von $^2/_3$ ist. >>*
> *[von Randow, 2006. S.12]*

Zur Veranschaulichung sind in dieser Tabelle alle möglichen Spielzüge aufgelistet:

Erste Wahl	Monty öffnet	Aktion	Zweite Wahl	Gewinn	Gewinn-Wahrscheinlichkeit
Auto	Ziege 1 oder 2	Wechseln	Ziege 2 bzw. 1	nein	$^2/_3$
Ziege 1	Ziege 2	Wechseln	Auto	ja	
Ziege 2	Ziege 1	Wechseln	Auto	ja	
Auto	Ziege 1 oder 2	Bleiben	Auto	ja	$^1/_3$
Ziege 1	Ziege 2	Bleiben	Ziege 1	nein	
Ziege 2	Ziege 1	Bleiben	Ziege 2	nein	

Tab. 1„Wechseln oder Bleiben? Mögliche Verläufe beim Ziegenproblem mit drei Türen, zwei Ziegen und einem Auto."
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.104]

Bei <<Wechseln>> wird in 2 von 3 Fällen gewonnen, bei <<Bleiben>> jedoch nur in einem von 3 Fällen. Die Tür zu wechseln verdoppelt damit die Gewinnchance.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.105]

Nachdem Gero von Randow einige weitere Artikel über das Ziegenproblem veröffentlichte, bekam er immer häufiger zustimmende Briefe und Rückmeldungen. Ihm wurden diverse Argumente von Lesern seiner Artikel zugeschickt, die seine und Frau Marilyns Lösung unterstützten. Viele Leser versuchten nachvollziehbare und einfache Lösungen in ihren Briefen zu formulieren.
[von Randow, 2006. S.10ff]

Stefan Sent aus Bonn beispielsweise schlug vor, das Ziegenproblem 999-mal mit 2 Kandidaten durchzuspielen. Beide sollten anfangs jedes Mal die selbe Tür wählen, aber nachdem der Moderator eine der beiden nichtgewählten Ziegentüren öffnete, sollte der zweite Kandidat immer wechseln. Da die erstgewählte Tür eine Gewinnchance von $^1/_3$ hat, wird der erste Kandidat, der nie wechselt, das Auto etwa 333-mal gewinnen. Die ca. 666 restlichen Autos werden zwangsweise von dem zweiten Kandidaten gewonnen, der immer wechselt.
[von Randow, 2006. S.13]

Gero von Randow gibt in seinem Buch Befehle der Programmiersprache BASIC an, die benötigt werden, um das Ziegenproblem zu programmieren, damit es von unüberzeugten Personen selbst mehrere Male durchgespielt werden kann. Darüber hinaus weist er darauf hin, dass eine norwegische Wissenschaftszeitschrift namens FAKTA das Ziegenproblem in umfangreichen und vielfachen Simulationen durchgespielt haben soll, um die letzten Zweifler zu überzeugen.
[von Randow, 2006. S.165ff]

Eine weitere gute Begründung erhielt Gero von Randow von Gerhard Keller aus Berlin. Dieser erweiterte die Anzahl der Türen auf hundert. Der Kandidat wählt eine Tür aus, und der Moderator öffnet solange Ziegentüren, bis nur noch eine weitere verschlossene Türe neben der erstgewählten Tür übrig bleibt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat bei seiner ersten Wahl die Tür mit dem Auto getroffen hat beträgt $^1/_{100}$ oder 1%. Die andere Tür enthält folglich mit 99% Wahrscheinlichkeit das Auto.
[von Randow, 2006. S.13]

8.2 Argumente gegen das Wechseln

Gero von Randow erhielt größtenteils Leserpost von Personen, die nicht seiner Meinung waren. Er wurde häufig als Idiot dargestellt, allerdings fanden sich auch mehrere sachliche Argumente und Einwände in der Leserpost wieder, die sich für die Sinnlosigkeit von Wechseln aussprachen.
[von Randow, 2006. S.14]

Eine Gruppe von Forschern aus Trient lieferte einen vernünftigen Einwand, der für eine fifty-fifty Chance spricht. Nehmen wir einmal an, Marilyn und Gero sind beide Kandidaten der Spielshow. Sie wählen zwei verschiedene Türen, 1 und 2, und der Moderator öffnet die verbleibende Tür, Nummer 3. Sollten beide nun tauschen um ihre Chance zu erhöhen – Bäumchen wechsle dich?
Der Fehler dieser Variante liegt darin, dass sie anderen Spielregeln folgt. Der Moderator kann nur noch die eine *nicht* gewählte Tür öffnen, selbst wenn dahinter das Auto sein sollte. Nach der nun sinnlosen Intervention des Moderators bleibt keine *nicht* gewählte Tür mehr übrig, über die er die Mitspieler hätte informieren können.
[von Randow, 2006. S.15]

Diese Aufgabe weist auf einen wichtigen Aspekt des Ziegenproblems hin, nämlich dem Verhalten des Moderators. Es gibt den berechtigten Einwand, dass über die Einschränkungen des Moderators nichts Konkretes bekannt ist.
[von Randow, 2006. S.68]

Deswegen gibt es zwei Voraussetzungen, damit die Lösung von Marilyn vos Savant tatsächlich berechtigt ist:

1) Der Moderator darf nicht die vom Kandidaten gewählte Tür öffnen.
2) Der Moderator darf nicht die Tür hinter der das Auto steht öffnen.
   [von Randow, 2006. S.67]

„Wechseln ist dann und nur dann besser, wenn der Moderator nur nicht gewählte Ziegentüren öffnen darf.“
[von Randow, 2006. S.67]

8.3 Der Vier-Fälle Einwand

Viele Leserbriefe an Gero von Randow enthielten den Einwand, dass es doch vier Fall-Varianten der Ziegenshow gäbe. In zwei Fälle sollte gewechselt werden, und in den übrigen nicht. Deshalb sollte es sich doch um eine fifty-fifty Gewinnchance handeln.
[von Randow, 2006. S.56]

Fall	Auto hinter Nr.	M öffnet Nr.	Richtige Strategie
(i)	1	2	(Nicht Wechseln)
(ii)	1	3	(Nicht Wechseln)
(iii)	2	3	(Wechseln)
(iv)	3	2	(Wechseln)

Tab. 2: Vier-Fälle-Einwand: K wählt 1. Nun gibt es vier Fälle
[http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node2.html]

Gero von Randow stellt fest, dass es tatsächlich vier Fälle gibt. Anschließend erklärt er mit folgender Grafik, dass diese Fälle unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten besitzen:

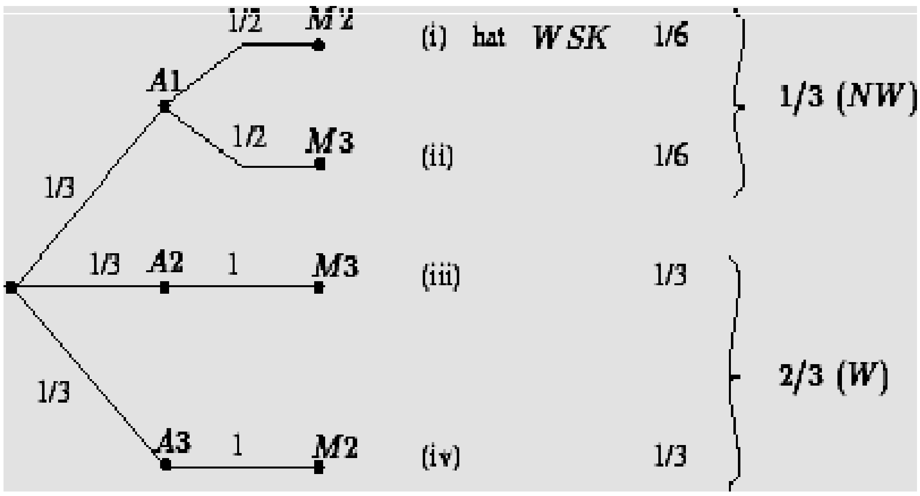


Abb. 1: Baumdiagramm: (i)-(iv) sind nicht gleichwahrscheinlich
[http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node2.html]

Es ist unzureichend, sich auszumalen, auf wie vielen Wegen ein Ereignis zustande kommen kann. Falls diese nicht gleich wahrscheinlich sind, müssen auch die unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten des jeweiligen Falls berücksichtigt werden.
[von Randow, 2006. S.58]

Folgende Grafik zeigt noch einmal die diversen Möglichkeiten. Der Buchstabe der Tür, welche von der Kandidatin gewählt wird, ist <<ohne Beschränkung der Allgemeinheit> >. Diese Floskel bedeutet, dass es unwichtig ist, wie die Türen benannt sind, solange die Buchstaben verschiedene Türen bezeichnen.
[von Randow, 2006. S.56f]

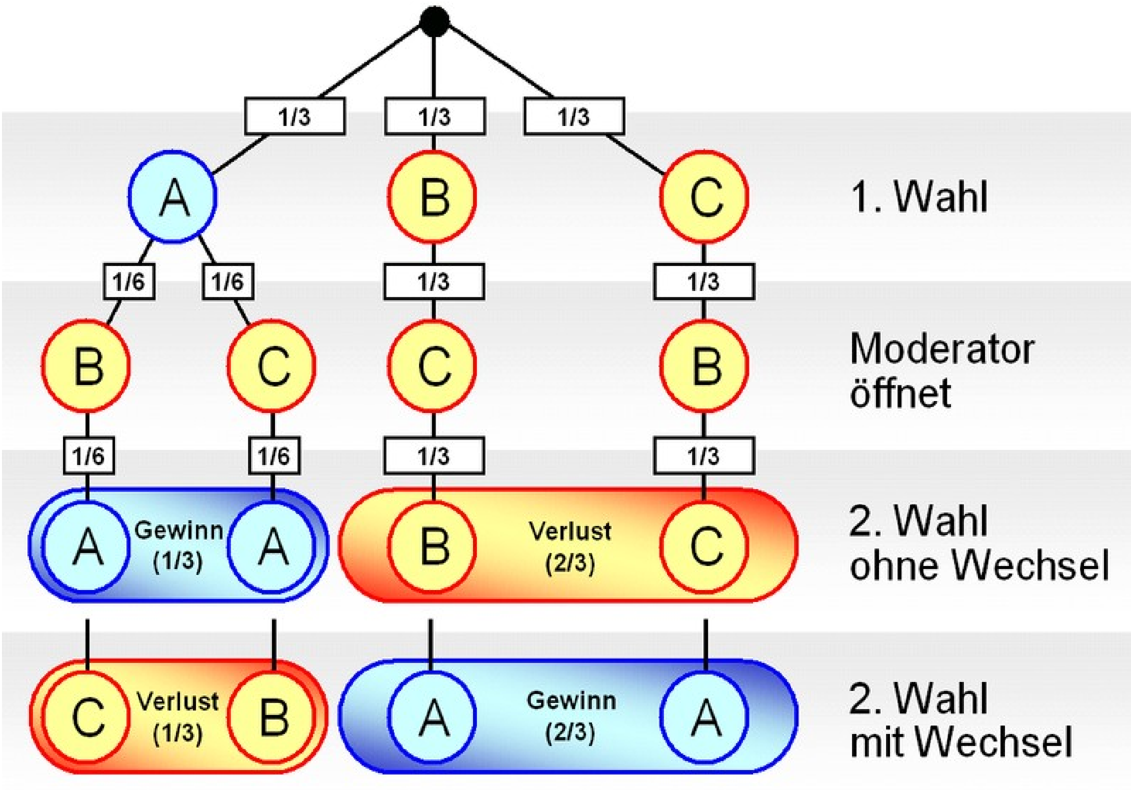


Abb. 2: Entscheidungsbaum - Ziegenproblem
[http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Entscheidungsbaum_Ziegenproblem.png]

A = Tür hinter dem das Auto steht
B, C = Türen hinter denen Ziegen stehen

Die Werte in den weißen Kästchen geben immer die Endwahrscheinlichkeit für das Eintreten eben dieses Falles an.

9. Die Aufklärung des Ziegenproblems durch die Bayes-Formel

Als Ausgangssituation nehmen wir das klassische Ziegenproblem. Hier noch einmal die wichtigsten Fakten: Die Kandidatin hat Tür 1 ausgewählt und der Moderator öffnet daraufhin Tür Nummer 3, hinter der sich eine Ziege befindet. Daraufhin hat die Kandidatin die Möglichkeit, zur Tür 2 zu wechseln oder bei ihrer ersten Wahl zu bleiben. Es wird angenommen, dass der Moderator nur nicht gewählte Ziegentüren öffnen darf.
[Behrends, 2006. S.37]

Die folgenden Abkürzungen werden verwendet:

B_1 = Das Auto befindet sich hinter Tür 1
B_2 = Das Auto befindet sich hinter Tür 2
B_3 = Das Auto befindet sich hinter Tür 3
Die Wahrscheinlichkeiten $P(B_1)$ bis $P(B_3)$ zu B_1 bis B_3 sind gleich, und zwar $^1/_3$.
Das Ereignis <<Der Moderator öffnet daraufhin Tür Nummer 3>> kürzen wir mit *A* ab.
[Behrends, 2006. S.36f]

Daraus folgt:

$P(B_1 \mid A)$ = Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 1 befindet, nachdem der Moderator Tür 3 geöffnet hat.
$P(B_2 \mid A)$ = Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter Tür 2 befindet, nachdem der Moderator Tür 3 geöffnet hat.
$P(B_3 \mid A)$ wird nicht benötigt, da der Moderator Tür 3 bereits geöffnet hat. $P(B_3 \mid A) = 0$
[Behrends, 2006. S.37]

Nun soll berechnet werden, ob $P(B_2 \mid A)$ größer ist als $P(B_1 \mid A)$, denn dann wäre Wechseln sinnvoll. Um die Bayes-Formel einsetzen zu können, werden die Zahlen zu $P(A \mid B_1)$, $P(A \mid B_2)$ und $P(A \mid B_3)$ benötigt.
[Behrends, 2006. S.37]

$P(A \mid B_1)$ = Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Moderator Tür 3 öffnet, wenn das Auto hinter Tür 1 steht.

$P(A \mid B_2)$ und $P(A \mid B_3)$ bedeuten dasselbe, lediglich handelt es sich um Tür 2 oder 3.

[Behrends, 2006. S.37]

$P(A \mid B_1) = {}^1/_2$: Da der Moderator mit gleicher Wahrscheinlichkeit Tür 2 bzw. 3 öffnet.

$P(A \mid B_2) = 1$: Weil der Moderator weder die von der Kandidatin gewählte Tür 1 noch die Tür 2, hinter der das Auto steht, öffnen darf, muss er Tür 3 öffnen.

$P(A \mid B_3) = 0$: Wenn das Auto hinter Tür 3 steht, kann der Moderator diese Tür nicht öffnen.

[Behrends, 2006. S.37]

Nun kann die Bayes-Formel angewannt werden:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + P(A/B_3)P(B_3)}$$

$$P(B_1 / A) = \frac{(1/2)\cdot(1/3)}{(1/2)\cdot(1/3) + 1\cdot(1/3) + 0\cdot(1/3)} = {}^1/_3$$

[Behrends, 2006. S.37]

$$P(B_2 / A) = \frac{1\cdot(1/3)}{(1/2)\cdot(1/3) + 1\cdot(1/3) + 0\cdot(1/3)} = {}^2/_3$$

[Behrends, 2006. S.38]

$P(B_1 \mid A)$, das für die Strategie <<Nicht Wechseln>> steht, tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von ${}^1/_3$ ein.

$P(B_2 \mid A)$ steht für die Strategie <<Wechseln>>, welche mit einer Wahrscheinlichkeit von ${}^2/_3$ erfolgreich ist.

Das bedeutet, dass Wechseln die Gewinnchancen verdoppelt.

[Behrends, 2006. S.38]

10. Varianten des Ziegenproblems

10.1 Problem der drei Verurteilten

Drei Verurteilte warten in der Todeszelle auf ihre baldige Hinrichtung. Am Morgen des schwarzen Tages flüstert ein Wärter dem Verurteilten A zu, dass der Gouverneur einen von ihnen begnadigt hat. A möchte mehr wissen, aber der Wärter darf nicht verraten, um wen es sich handelt. A lässt nicht locker und schließlich gibt der Wärter einen indirekten Hinweis: „Ich darf nicht sagen, wie es um dich steht, allerdings kann ich dir verraten, dass der Verurteilte B sterben muss.“ A glaubt, dass sich nun seine Überlebenschancen von $^{1}/_{3}$ auf $^{1}/_{2}$ erhöht haben. Liegt er damit richtig?
[von Randow, 2006. S.58f]

A liegt falsch, denn seine Überlebenschancen steigern sich nicht, weil die unterschiedlichen Möglichkeiten andere Wahrscheinlichkeiten haben, wie folgende Grafik zeigt:

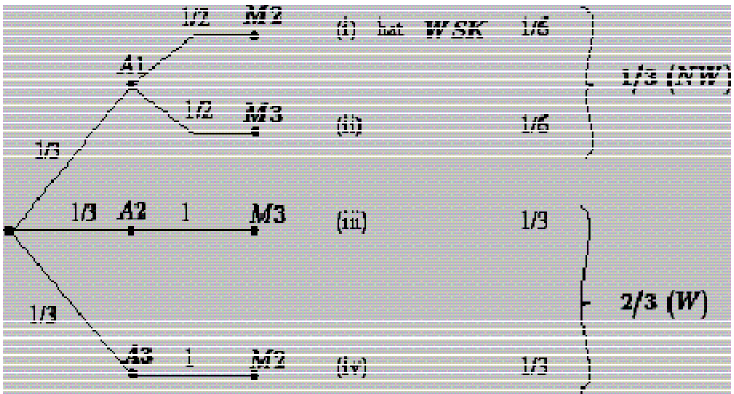


Abb. 3: B *wird in (i) und (iv) genannt. Aber (iv) ist doppelt so wahrscheinlich wie (i)! (Man könnte auch sagen: Nennung von* B *sagt nichts über* A.*)*
[http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node3.html]

Die Überlebenschancen von A betragen selbst nach dem Hinweis immer noch $^{1}/_{3}$. Der Wärter gibt durch seine Äußerung über B lediglich eine indirekte Auskunft über C, dessen Überlebenschancen damit nämlich auf $^{2}/_{3}$ angestiegen sind. Wenn A angeboten wird den Platz von C einzunehmen, sollte er dieses Angebot annehmen.
[von Randow, 2006. S.59]

10.2 Ein Hochhaus mit fast drei Aufzügen

Sie wollen einen Freund besuchen, der sich in einem Hotel im 12. Stock einquartiert hat. Das Hotel hat drei Aufzüge, und ihr Freund hat Sie vorgewarnt, dass einer von ihnen kaputt ist. Sie wissen aber nicht welcher, und man sieht es ihm auch nicht an. Die Aufzüge liegen soweit auseinander, dass Sie diese zwar hören können, aber wegen herumstehenden Gepäcks von abreisenden Touristen nicht rechtzeitig erreichen würden, sollten Sie nicht direkt daneben stehen. Sie stellen sich neben einen beliebigen Aufzug und warten. Daraufhin hören sie wie einer der beiden anderen Aufzüge kommt und wieder abfährt. Wäre es nun klüger bei Ihrer ersten Wahl zu bleiben oder den übrigen Lift aufzusuchen?
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.106f]

Erste Wahl	Aufzug kommt	Aktion	Zweite Wahl	Gewinn	Vorteil
Kaputt	Fährt 1 oder 2	Wechseln	Fährt 2 bzw. 1	gut	$^1/_3$
Fährt 1	Fährt 2	Wechseln	Kaputt	schlecht	
Fährt 2	Fährt 1	Wechseln	Kaputt	schlecht	
Kaputt	Fährt 1 oder 2	Bleiben	Kaputt	schlecht	$^2/_3$
Fährt 1	Fährt 2	Bleiben	Fährt 1	gut	
Fährt 2	Fährt 1	Bleiben	Fährt 2	gut	

Tab. 3: „Laufen oder Warten? Mögliche Verläufe bei der Wahl der Aufzüge. Einer von drei Aufzügen ist kaputt.“
[Beck-Bornholdt &Dubben, 2005. S.107]

Da es doppelt so wahrscheinlich ist, dass es sich bei Ihrer ersten Wahl um einen funktionierenden Fahrstuhl handelt, ist es demnach doppelt so wahrscheinlich, dass Sie Zeit verlieren werden, sollten Sie sich entscheiden, den Aufzug zu wechseln.
[Beck-Bornholdt & Dubben, 2005. S.107]

11. Nachwort

Die Fachbereichsarbeit zu schreiben war einerseits anstrengender, und andererseits *nicht* umfangreicher als erwartet. Den stofflichen Inhalt festzulegen und einzuteilen, war relativ einfach. Auch das Schreiben an sich war nicht unbedingt schwierig, da mich das Thema interessierte. Allerdings war es ziemlich frustrierend, alle formalen Aspekte zu berücksichtigen. Die Hälfte der Fachbereichsarbeit war schon verfasst, als ich darauf hingewiesen wurde, dass sich unter *jedem* Absatz eine Quellenangabe befinden sollte/muss. Ebenso bereitete es mir Kopfzerbrechen, wie ich denn korrekt aus Wikipedia zitiere, welches keine Autorenangaben liefert. Ich habe Tage verbracht, um meine Arbeit zu formatieren. Ich habe nicht über einen längeren Zeitraum hinweg immer ein wenig geschrieben, sondern mich viermal zwei Tage lang hingesetzt und den kompletten Inhalt mit Hand geschrieben. Anschließend durfte ich diesen tippen, meinen Korrekturlesern geben und wieder überarbeiten. Ich hoffe nur, dass ich alle Aspekte des Ziegenproblems verständlich verfassen konnte, ebenso natürlich auch die bedingte Wahrscheinlichkeit. Allerdings war diese für mich weniger packend. In erster Linie war es mein Ziel, dass auch Personen, die weniger an Mathematik interessiert sind, das Ziegenproblem und dessen Lösung verstehen, nachdem sie sich die Mühe gemacht haben, meine Arbeit tatsächlich zu lesen. Ich hoffe, dies ist mir gelungen.

12. Illustrationsverzeichnis

12.1 Abbildungen

12.2 Tabellen

13. Quellenverzeichnis

13.1 Literatur

Beck-Bernholdt, H.; Dubben, H. (2005). Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit. Hamburg.

Behrends, E. (2006). Fünf Minuten Mathematik. Wiesbaden.

Bürger, H.; Fischer, R.; Malle, G. (1980). Mathematik Oberstufe 3. Wien.

Campbell, N.; Reece, J. (2003). Biologie. Berlin.

Engel, A. (1973). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart.

Steiner, G.; Weilharter, J. (1998). Mathematik 4 - 2. Auflage. Wien.

von Randow, G. (2006). Denken in Wahrscheinlichkeiten. Hamburg.

13.2 Persönliche Gespräche

Dr. Gurtner, M. persönliches Gespräch. (07.08.2006). Wien.

13.3 Internet

Hartmann, H. (2007). 4.3.2 Intelligenzquotient (IQ). Online im Internet. URL: http://www.psychophilo.at/content/psycho/denken.html (10.01.2007).

Koch, R. (2003). Varianten des Ziegenproblems. Online im Internet. URL: http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/koch/ziegen/node3.html (12.11.2006).

Wikimedia Foundation (2003). Online im Internet. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Bedingte_Wahrscheinlichkeit (12.11.2006).

http://de.wikipedia.org/wiki/Chevalier_de_Mere (14.01.2007).

http://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens (14.01.2007).

http://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_der_gro%C3%9Fen_Zahl (02.12.2006).

http://de.wikipedia.org/wiki/Hilbert (17.01.2007).

http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli (14.01.2007).

http://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Pearson (14.01.2007).

http://de.wikipedia.org/wiki/Kolmogorow (14.01.2007)

http://de.wikipedia.org/wiki/Laplace (14.01.2007).

Ich erkläre, dass ich diese Fachbereichsarbeit selbst verfasst und ausschließlich die angegeben Quellen verwendet habe.