Infinitesimalrechnung

1. Grenzwerte von Funktionen

Hier können wir anschließen an das Kapitel: Grenzwert einer Folge. Da ging es darum, z.B. den Grenzwert der Folge $\langle\frac{2n-1}{n+3}\rangle$ für n gegen Unendlich (n→∞) zu bestimmen. Da war der Trick dabei, Zähler und Nenner durch n zu dividieren und dann den Limes durchzuführen, wobei man weiß, dass Terme wie $\frac{1}{n}$ für n gegen Unendlich gegen Null gehen.

Das kann man auf Funktionen erweitern:

Der **Linksseitige GRENZWERT $f(x_0-)$ einer Funktion f(x) an der Stelle x_0** ergibt sich, wenn jede Folge $<x_n>$ von Zahlen, die kleiner als x_0 sind und gegen x_0 konvergieren zur Folge haben, dass der Limes der Folge der Funktionswerte $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n)$ gegen einen festen Zahlenwert $f(x_0-)$ gehen.

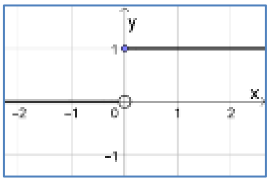
Analog ist **der rechtsseitige Grenzwert** $f(x_0+)$ **einer Funktion** definiert

Der (allgemeine) **Grenzwert** existiert wenn links– und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.

Beispiel 1: Der linksseitige Grenzwert von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ergibt sich z.B. mit der Folge
$a_n = 1-\frac{1}{n}$ als $f(1-\frac{1}{n}) = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ und der Grenzwert ergibt $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}) = 1$

Beispiel 2: Die **Heaviside–Sprung–Funktion** ist so definiert, dass sie für Zahlenwerte kleiner als 0 den Funktionswert 0 hat und für Zahlenwerte größer gleich Null den Funktionswert 1 hat:

$H(x) = \begin{cases} 0 \; für \; x < 0 \\ 1 \; für \; x \geq 0 \end{cases}$

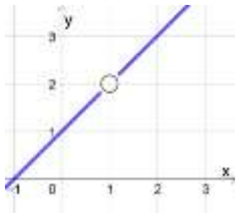


Der linksseitige Grenzwert ist $H(0-) = 0$
Der rechtsseitige Grenzwert ist $H(0+) = 1$
Daher ist diese Funktion bei Null eine **Sprungfunktion**.

GRENZWERTSÄTZE:
Der Grenzwert der Summe, Differenz und Produkt von Funktionen ist die Summe, Differenz und Produkt der Grenzwerte der Teilfunktionen z.B.: $\lim [f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$ für $x \to x_0$
Der Grenzwert des Quotienten zweier Teilfunktionen existiert, wenn der Grenzwert des Nenners nicht Null ist und ist der Quotient der Grenzwerte: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ für $x \to x_0$
Das gilt für rechtsseitige, linksseitige und allgemeine Grenzwerte gleichermaßen.

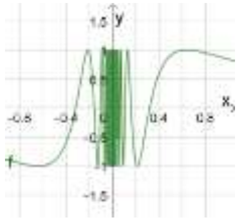
Beispiel 3: Bestimme die (rechts– und linksseitigen) Grenzwerte von
a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für $x\to 1$
b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x\to 0$
c) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ für $x\to 2$

Lösung:

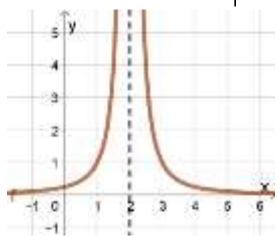


a) Wenn wir ohne Umformung x=1 in die Funktion f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$ einsetzen, so entsteht der Bruch $\frac{0}{0}$, der keine Zahl zugeordnet werden kann (Division durch 0) – Das ist eine Ausnahmestelle der Definitionsmenge (D=$\mathbb{R}\backslash\{1\}$)

Den Grenzwert können wir hier bekommen, wenn wir die binomische Formel anwenden:
Wir zerlegen den Bruch mit der binomischen Formel $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)}$ und kürzen (x−1) heraus ➔ f(x) = (x+1). Jetzt wird der **Grenzwert** $\lim_{x\to 1}(x+1)$ = **2**
Das ist der links–und rechtsseitige Grenzwert gleichzeitig.
Das ist insgesamt der Fall einer **LÜCKE** der Funktion (siehe Grafik mit Kreis bei x=1)



b) Die Funktion f(x) = $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist für x=0 nicht definiert, da durch 0 dividiert wird.
Für die Folge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ist <sin(nπ)> = <0,0,0,...> und daher der Grenzwert 0
Für die Folge $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ ist <sin($\frac{\pi}{2}+2n\pi$)> = <1,1,1,...> und daher der Grenzwert 1.
Es können aber nicht verschiedene Werte für den Grenzwert existieren, also ist der **Grenzwert unbestimmt!**



c) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ist für x=2 nicht definiert wegen der Division durch 0.
Zur Bestimmung des linksseitigen Grenzwertes nehmen wir die Folge $x_n = 2 - \frac{1}{n}$
➔ $f(x_n) = \frac{1}{(2-\frac{1}{n}-2)^2} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2$
Der Grenzwert ergibt sich zu $\lim_{n\to\infty}(n^2) = \infty$ ➔ **existiert also nicht als reelle Zahl**
Dieser Fall nennt sich **POLSTELLE** der Funktion (=**Unendlichkeitsstelle** der Funktion)

2. Stetigkeit von Funktionen

Funktionen sind dann stetig, wenn sie in einem Zug gezeichnet werden können (ohne Absetzen vom Blatt) – das wäre die plausible Definition, exakt müsste sie so lauten:

Eine Funktion f(x) ist an der Stelle x_0 **stetig**, wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion gleich dem Funktionswert ist: $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **LÜCKE (behebbare Unstetigkeitsstelle)**, wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion gleich sind aber verschieden von $f(x_0)$:
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) \neq f(x_0)$$

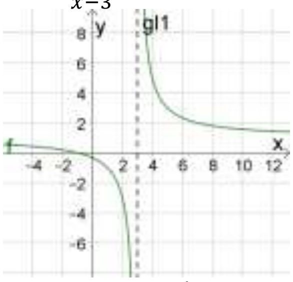
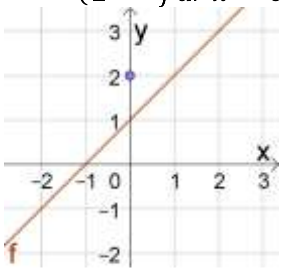
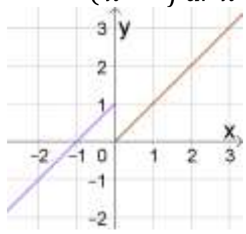
Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **POLSTELLE (Unendlichkeitsstelle)**, wenn der rechtsseitige oder linkseitige Grenzwert der Funktion ∞ ergeben. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 eine **SPRUNGSTELLE,** wenn der rechtsseitige und linkseitige Grenzwert der Funktion existieren, aber verschieden sind
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

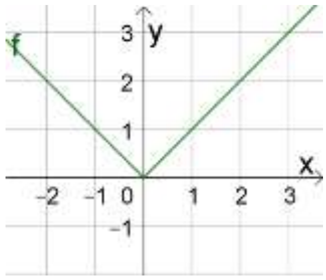
Beispiel:
Bestimme die Unstetigkeitsstellen der Funktionen

a) f(x) = $\frac{x+1}{x-3}$, b) g(x) = $\begin{cases} x+1 \text{ für } x \neq 0 \\ 2 \quad \text{ für } x = 0 \end{cases}$ c) h(x) = $\begin{cases} x+1 \text{ für } x < 0 \\ x \quad \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$

Lösung:

f(x) = $\frac{x+1}{x-3}$  $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{4}{0} = \infty$ f(3) ex. nicht **POLSTELLE in x=3**	g(x) = $\begin{cases} x+1 \text{ für } x \neq 0 \\ 2 \quad \text{ für } x = 0 \end{cases}$  $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 1$ f(0)=2 **LÜCKE in x=0**	h(x) = $\begin{cases} x+1 \text{ für } x < 0 \\ x \quad \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$  $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ f(0) =0 **SPRUNGSTELLE in x=0**

3. Differenzierbarkeit von Funktionen



Die Ableitung einer Funktion (=Steigung) muss nicht an jeder Stelle existieren. Bei der Funktion f(x) = |x| (Betrag von x) ist die Steigung im Punkt (0|0) nicht ersichtlich – siehe Funktion rechts.

Deshalb unterscheidet man Funktionen, die überall differenzierbar sind von Funktionen die an bestimmten Stellen nicht differenzierbar sind.

Definition:

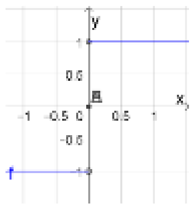
Eine relle Funktion f(x): D→ℝ heißt **an der Stelle x_0 differenzierbar**, wenn f'(x_0) = $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.
Ist die Funktion überall (aus der Definitionsmenge D) differenzierbar, so heißt die Funktion **differenzierbar**.

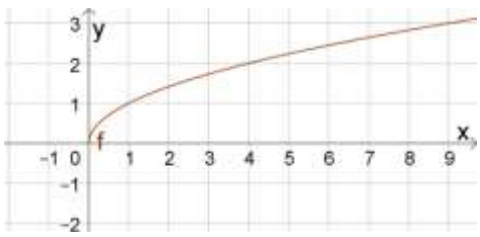
Beispiele: In ihrem jeweiligen Definitionsbereich(!) sind folgende Funktionen (überall) differenzierbar: Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, rationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Winkelfunktionen

- Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig, daher ist die Stetigkeit eine Voraussetzung für die Differenzierbarkeit

Negativbeispiele:

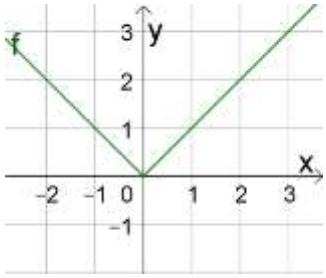
- Die Funktion Vorzeichenfunktion f(x) = sign(x) = $\begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$
  ist an der Stelle x=0 nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar





- Die Wurzelfunktion f(x) = $\sqrt{x}$ ist zwar an der Stelle x=0 noch definiert, aber dort nicht differenzierbar, weil dort die Steigung ∞ ist

- Die Betragsfunktion f(x) = |x| ist bei x=0 nicht differenzierbar weil 2 Steigungen hier zusammentreffen (mit k= 1 und k= −1)



4. Integrierbarkeit von Funktionen

Gibt es überhaupt Funktionen, die nicht integrierbar sind?

Dazu müssen wir uns einerseits die **Stammfunktionen** ansehen, die nicht immer existieren. Die Stammfunktion der quadratischen Exponentialfunktion $\int e^{x^2} dx$ existiert nicht und $\int e^{-x^2} dx$ ebenso nicht. Erkennen kann man auf den ersten Blick nicht, ob eine Funktion eine Stammfunktion hat oder nicht. Aber es gibt Listen der Integrale und Computeralgebrasysteme, die können alles Ausrechenbare ausrechnen (z.B. WolframAlpha). Wenn die das nicht können, dann gibt es (derzeit) keine Stammfunktion.

Die **bestimmten Integrale**, die als Flächen unter der Kurve definierbar sind, sind meistens existent. Aber auch hier gibt es Ausnahmen. Eine Funktion ist so verrückt definiert: Bei einem Wert von x, der einer rationalen Zahl entspricht, ist die Funktion 1 und bei einer irrationalen Zahl ist die Funktion 0:

f(x) = $\begin{cases} 1\ wennn\ x\ rational\ ist \\ 0\ wenn\ x\ irrational\ ist \end{cases}$

Diese Funktion ist in jedem Teilintervall der reellen Zahlen immer gleichzeitig 0 und 1. Daher ist die Obersumme 1 und die Untersumme 0 – und diese konvergieren nicht zueinander. Daher ist diese Funktion nicht integrierbar.

5. Integration durch Substitution

(„Division durch die Innere Ableitung, wenn diese konstant ist oder sich kürzt mit dem Rest x–Term)

$\int x \cdot \sqrt{4x^2-5} \cdot\ dx = \frac{\cancel{x} \cdot \frac{(4x^2-5)^{3/2}}{3/2}}{8\cancel{x}} = \frac{(4x^2-5)^{\frac{3}{2}}}{12} + C$ Ersetzt man (4x²–5) durch z und sucht z'= 8x, so ist es

exakter: $\int \frac{8x}{8} \cdot (z)^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{8} \int z' \cdot (z)^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{1}{8} \int \frac{dz}{\cancel{dx}} \cdot (z)^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{dx} = \frac{1}{8} \int z^{\frac{1}{2}} \cdot dz = \frac{1}{8}\ \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = = \frac{(4x^2-5)^{\frac{3}{2}}}{12} + C$

6. Partielle Integration

(siehe: https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8cwsw&list=PLj7p5OoL6vGyhgDkgUgKsVUZQvdPS-_WB)

Formel: $\underline{\int f \cdot g'} \ = \ f \cdot g \underline{- \int f' \cdot g}$

$\int x^2 \cdot \sin(x) \cdot dx$ = x²· −cos(x) $\underline{- \int 2x \cdot -\cos(x)}$ = … −2x· −sin(x) $\underline{- \int 2 \cdot\ -\sin(x)}$ = … $\underline{+ 2\cdot\cos(x)}$

Vorzeichen	Diff	Int	Produkt = Integrationsteile
+ →	x²	sin(x)	
– →	2x	−cos(x)	−x²·cos(x)
+ →	2	−sin(x)	+2x·sin(x)
– →	0	cos(x)	+2·cos(x)
+			

➔ $\int x^2 \cdot \sin(3x) \cdot dx$ = −x²·cos(3x)/3 +2x·sin(3x)/9 +2·cos(3x)/27 **+ C**

Übungen:

A) Bestimme den rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert der Funktion f(x) an der Stelle x_0

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{4}{1-x}$ bei $x_0 = 1$ c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)}$ bei $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x-2}$ bei $x_0 = 2$ e) $f(x) = \ln(x)$ bei $x_0 = 1$ f) $f(x) = \frac{2}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$ bei $x_0 = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x < 1 \\ 1 \text{ für } x \geq 1 \end{cases}$ bei $x_0 = 1$ h) $f(x) = \begin{cases} x \text{ für } x < 1 \\ 2 \text{ für } x \geq 1 \end{cases}$ bei $x_0 = 1$

i) $f(x) = \begin{cases} -x+3 \text{ für } x < 3 \\ x-2 \text{ für } x \geq 3 \end{cases}$ bei $x_0 = 3$ j) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ für } x < 0 \\ x-1 \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$ bei $x_0 = 0$

B) Suche die Unstetigkeitsstelle und bestimme die Art der Unstetigkeitsstelle (**Polstelle=** Unendlichkeitsstelle oder **Lücke**=behebbare Unstetigkeit oder **Sprungstelle**) [Hinweis: Verwende die Binomische Formel]

a) $f(x) = \frac{2x}{x+4}$ b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ d) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ f) f(x) = sign(x) g) $f(x) = \begin{cases} x-3 \text{ für } x \geq 2 \\ x+3 \text{ für } x < 2 \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ 6-x & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$

C) Berechne mit Substitution

1a) $\int (1+x)^4 dx$	1b) $\int (3x-2)^3 dx$	1c) $\int (2-x)^3 dx$
2a) $\int x\,(3x^2-1)^2 dx$	2b) $\int x(5-7x^2)^2 dx$	2c) $\int x(3-2x^2)\, dx$
3a) $\int (7-71x)^{-2}\, dx$	3b) $\int \frac{x^2}{(5-4x^3)^3} dx$	3c) $\int \frac{4x-14}{(x^2-7x+6)^4} dx$
4a) $\int \sqrt{2x-2}\, dx$	4b) $\int \sqrt[3]{(3-2x)^2}\, dx$	4c) $\int \sqrt[5]{x(\frac{1}{x}-5)}\, dx$
5a) $\int 2x\sqrt{x^2-5}\, dx$	5b) $\int x\sqrt{x^2+5}\, dx$	5c) $\int -x\sqrt{x^2-1}\, dx$
6a) $\int (5x-12)^{-1/2}\, dx$	6b) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$	6c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$
7a) $\int \frac{1}{5+x} dx$	7b) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$	7c) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$
8a) $\int \frac{2x^3}{5-x^4} dx$	8b) $\int \frac{4x^3+8x}{(x^2+2)^2} dx$	8c)*) $\int \frac{x\cdot(x^2-3)}{(3-x^2)^2} dx$
9a) $\int \sin(3x-1)\cdot dx$	9b) $\int \cos(2x-1)\cdot dx$	9c) $\int e^{3x}\cdot dx$

*) zuerst kürzen!

D) Berechne mit partieller Integration:

10a) $\int x\cdot e^x\, dx$	10b) $\int x^2 e^x dx$	10c) $\int x^3\cdot e^x\, dx$
11a) $\int x\cdot e^{-x} dx$	11b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	11c) $\int \ln x\, dx$
12a) $\int x\cdot \ln x\, dx$	12b) $\int x^2\cdot \ln x\, dx$	12c) $\int x\cdot \sin x\, dx$
13a) $\int x\cdot \cos x\, dx$	13b) $\int x\cdot \cos 2x\, dx$	13c) $\int x^2\cdot \cos 3x\, dx$
14a*) $\int \sin^2 x\, dx$	14b*) $\int \cos^2 x\, dx$	14c*) $\int \sin x\cdot e^x dx$
15a*) $\int \sin x\cdot \cos x\, dx$	15b) $\int x\cdot \sin 2x\, dx$	15c) $\int x\cdot (1-x)^{10}\, dx$

Lösungen:

A) a) f(0−)= −∞ f(0+) = +∞ b) f(1−) = +∞ f(1+) = −∞ c) f(1−) = 0 f(1+) = 0
d) f(2−) = ex. nicht f(2+) = 0 e) f(1−) = −0 f(1+) = +0 f) f(0−) = 0 f(0+) = 2
g) f(1−) = 1 f(1+) = 1 h) f(1−) = 1 f(1+) = 2
i) f(3−) = 0 f(3+) = 1 j) f(0−) = 0 f(0+) = −1

B) a) Polstelle bei x=−4 b) Lücke bei x=−2 c) Polstelle bei x=2 d) Lücke bei x=2
e) Polstelle bei x=3 f) Sprungstelle bei 0 g) Sprungstelle bei 2 h) Sprungstelle bei 0

1a) $\frac{(1+x)^5}{5}+C$ 1b) $\frac{(3x-2)^4}{12}$ 1c) $\frac{-(x-2)^4}{4}$

2a) $\frac{(3x^2-1)^3}{18}$ 2b) $-\frac{(5-7x^2)^3}{42}$ 2c) $\frac{-(3-2x^2)^2}{8}$

3a) $\frac{-1}{71\cdot(71x-7)}$ 3b) $\frac{1}{24(5-4x^3)^2}$ 3c) $\frac{-2}{3(x^2-7x+6)^3}$

4a) $\frac{2\sqrt{(2x-2)^3}}{3}$ 4b) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{(2x-3)^5}}{10}$ 4c) $-\frac{1}{6}\cdot\sqrt[5]{(5x-1)^6}$

5a) $\frac{2\sqrt{(x^2-5)^3}}{3}$ 5b) $\frac{\sqrt{(x^2+5)^3}}{3}$ 5c) $-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3}$

6a) $\frac{2\sqrt{5x-12}}{5}$ 6b) $-\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ 6c) $\sqrt{x^2-1}$

7a) ln (|x+5|) 7b) $\frac{\ln(|x^2+1|)}{2}$ 7c) $-\frac{\ln(|x^2-1|)}{2}$

8a) $\frac{-\ln(|x^4-5|)}{2}$ 8b) 2·ln(x²+2) 8c) $\frac{\ln(|x^2-3|)}{2}$

9a) $\frac{-\cos(3x-1)}{3}$ 9b) $\frac{\sin(2x-1)}{2}$ 9c) $\frac{e^{3x}}{3}$

10a) (x−1)·e^x 10b) (x²−2x+2)·e^x 10c) (x³−3x²+6x−6)·e^x

11a) (-x-1)·e^{-x} 11b) $\frac{(\ln x)^3}{3}$ 11c) x· ln x − x

12a) $\frac{x^2\cdot\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}$ 12b) $\frac{x^3(3\ln x-1)}{9}$ 12c) sin x − x· cos x

13a) cos x + x· sin x 13b) $\frac{\cos 2x}{4}+\frac{x\sin 2x}{2}$ 13c) $\frac{2x\cdot\cos(3x)}{9}+(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{27})\cdot\sin(3x)$

14a)
$$\boxed{\begin{aligned}
&\int\sin^2 x=\int\sin x\cdot\sin x=-\cos x\cdot\sin x-\int-\cos x\cdot\cos x\\
&\qquad=-\cos x\cdot\sin x+\int 1-\sin^2 x\\
&\qquad=-\cos x\cdot\sin x+x-\int\sin^2 x \qquad |+\int\sin^2 x\\
&2*\int\sin^2 x=-\cos x\cdot\sin x+x \qquad |:2\\
&\int\sin^2 x=\frac{-\cos x\cdot\sin x+x}{2}
\end{aligned}}$$

14b) $\frac{\sin x\cdot\cos x}{2}+\frac{x}{2}$ = $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{2}$

14c) e^x·(sin x − cos x)/2

15a) $-\frac{\cos^2 x}{2}$ $=-\frac{\cos 2x}{4}+C$ 15b) $\frac{\sin(2x)-2x\cdot\cos(2x)}{4}$ 15c) $\frac{-x\cdot(1-x)^{11}}{11}-\frac{(1-x)^{12}}{132}$

16a) x² + x 16b) $\frac{x^2}{2}-2x$ 16c) $\frac{x^2}{2}-2x$

17a) 5·ln(|x−5|) 17b) 4·(2·ln(|x−2|) + x) 17c) 1,5·(32 ·ln(|x+4|) + x·(x-8))

18a) $\frac{-\ln(|x+3|)+\ln(|x-3|)}{6}$ 18b) 5·ln(|x|) − 4·ln(|x-+1|) 18c) $\frac{8\cdot\ln(|x|)+17\cdot\ln(|x-5|)}{5}$

19a) ln(|x-2|) + ln(|x+2|) + x 19b) 9·ln(|x-5|) − $\frac{20}{x-5}$ + x 19c) $-\frac{2}{5}\cdot\left(\ln(\|x+3)-\ln(|x-2|)\right)$