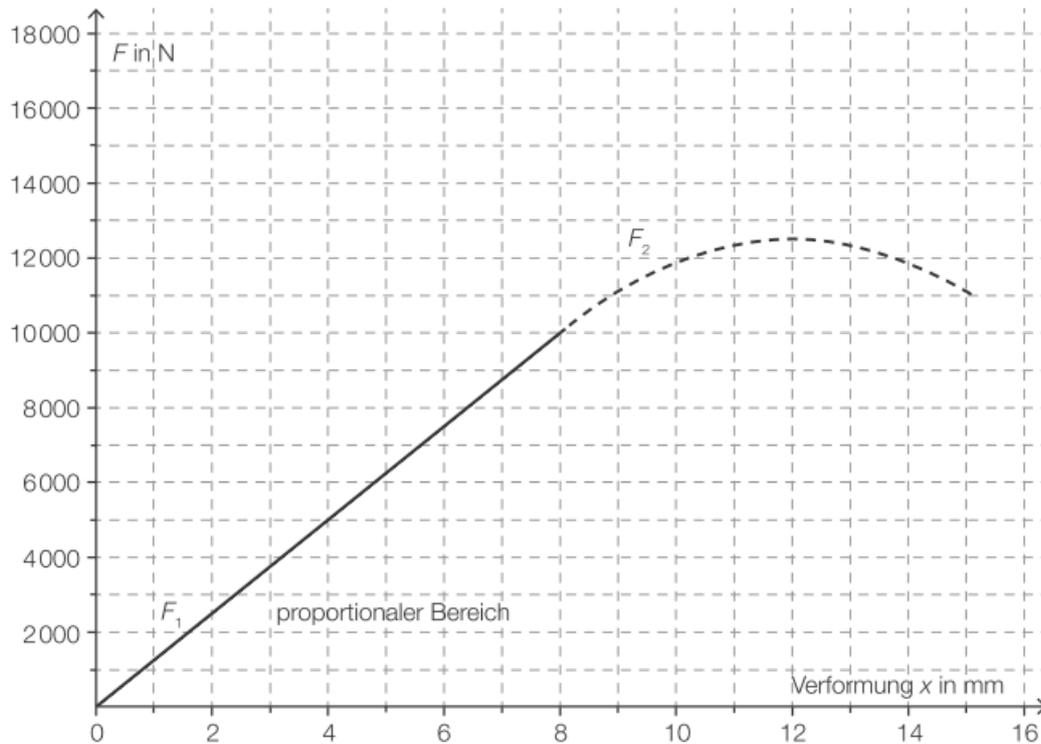


Integration

- 1) Bei einer Bruchbiegeprüfung wird die Festigkeit von Materialproben bestimmt. Unter Erhöhung des Betrags der Kraft \vec{F} in Newton (N) wird die verursachte Verformung x in Millimetern (mm) ermittelt. Das Kraft-Verformungs-Diagramm beschreibt den Zusammenhang von Kraft und Verformung. Der Verlauf einer Bruchbiegeprüfung an einer Holzprobe ist im nachstehenden Kraft-Verformungs-Diagramm dargestellt.



Der zweite Teil der Funktion hat die Formel

$$F_2(x) = -\frac{625}{4} \cdot x^2 + 3700 \cdot x - 10000 \quad \text{für } 8 \leq x \leq 15,1$$

- a) – Berechnen Sie die maximale Kraft im dargestellten Bruchbiegeversuch mithilfe der Differentialrechnung.
- b) Nach einer Verformung von 15,1 mm kam es zum Bruch.
- Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion F_1 .
 - Berechnen Sie die Arbeit W ($W = \int F(x) dx$), die bis zum Bruch verrichtet wurde.
- 2) Ein Landwirt will den Ertrag pro Quadratmeter (m^2) einer bestimmten Gemüsesorte steigern. Dazu prüft er den Einsatz eines Düngemittels. Die Ableitungsfunktion E' der Ertragsfunktion E lautet wie folgt:
- $$E'(x) = -891 \cdot x^2 + 297 \cdot x \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 0,53$$
- x ... Düngermenge in kg pro m^2
 $E'(x)$... lokale Ertragsänderungsrate bei der Düngermenge x
- Ohne Düngemittel erntet der Landwirt durchschnittlich 2,5 kg Gemüse pro Quadratmeter.
- Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Ertragsfunktion E .

- 3) Eine Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben durch

$$f(x) = 0.01x^2$$

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis zwischen 0 und 6 liegt durch das Integral

$$\int_0^6 f(x) \cdot dx$$

- 4) Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe.

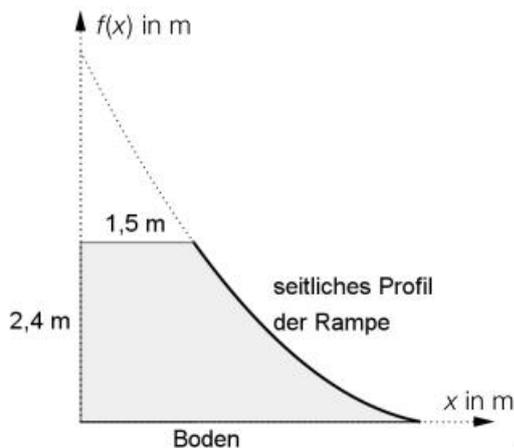


Abb. 1

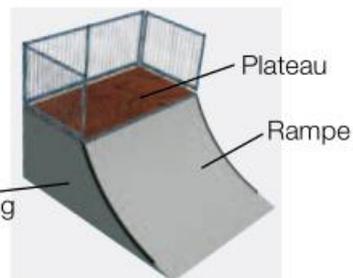


Abb. 2

Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden:

$$f(x) = 0,2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4,95 \quad \text{mit } 1,5 \leq x \leq 4,5$$

x ... waagrechte Entfernung von der Rückwand in Metern (m)

$f(x)$... Höhe der Rampe in Metern (m) an der Stelle x

- Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung 1.
- Zeigen Sie, dass die gegebene Parabel 2. Ordnung beim Übergang zum Boden keine waagrechte Tangente aufweist.
- Dokumentieren Sie die Berechnung des Winkels zwischen Plateau und Rampe.

- 5) Eine Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$$P(t) = 0,007 \cdot t^4 - 0,165 \cdot t^3 + 0,972 \cdot t^2 + 1,221 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 12$$

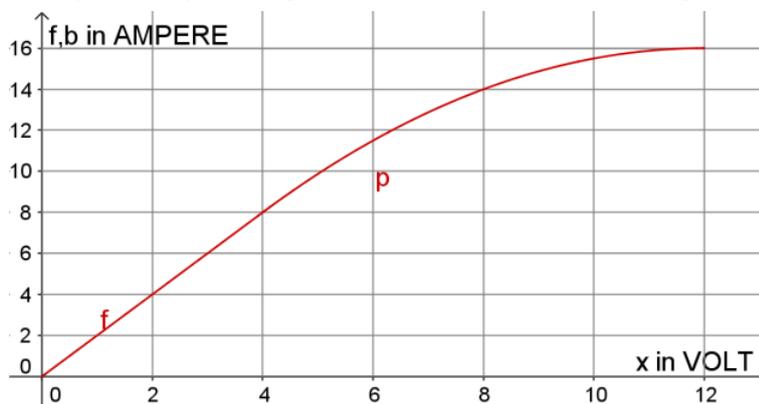
t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht

$P(t)$... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

- Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie.

- 6) Folgender Strom (Ampere)– Spannungs (Volt) –Verlauf an einem begrenzten Widerstand ist gegeben:



Die Funktion f ist linear, die Funktion b ist: $b(x) = -3/16 \cdot x^2 + 7/2 \cdot x - 3$ für $4 < x < 12$

Das Produkt aus Strom und Spannung ergibt die Leistung in Watt.

- Berechnen Sie die Leistung als Fläche, die sich unter der Kurve zwischen 0 und 12 Volt ergibt.

Lösungen:

1) a) $F_2'(x) = -\frac{625}{2} \cdot x + 3750$
 $-\frac{625}{2} \cdot x + 3750 = 0 \Rightarrow x = 12 \text{ mm}$

$$F_2(12) = 12500 \text{ N}$$

Die maximale Kraft beträgt 12500 N.

b) Ablesen aus der Grafik: $P_1 = (0|0)$, $P_2 = (4|5000)$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5000}{4} = 1250$$

$$F_1(x) = 1250 \cdot x \text{ mit } 0 \leq x \leq 8$$

Berechnung des Schnittpunkts der Funktionen:

$$F_1(x) = F_2(x) \Rightarrow x_1 = 8$$

Berechnung der Brucharbeit W :

$$W = \int_0^8 F_1(x) dx + \int_8^{15,1} F_2(x) dx$$

$$W = 123865,05 \dots \text{ Nmm}$$

Bis zum Bruch wurde eine Arbeit von rund 123865 Nmm verrichtet.

2) $E(x) = -297 \cdot x^3 + 148,5 \cdot x^2 + 2,5$

3) $0,72 = 72\%$

4) a) Schnittpunkt der Parabel mit der x -Achse: $N = (4,5|0)$

$$A_1 = a \cdot b = 2,4 \cdot 1,5 = 3,6$$

$$A_2 = \int_{1,5}^{4,5} f(x) dx = 2,7$$

$$A = A_1 + A_2 = 3,6 + 2,7 = 6,3$$

Die Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung beträgt rund 6,3 m².

b) Eine Parabel 2. Ordnung hat nur ein lokales Extremum.

Berechnung des Tiefpunkts: $T = (5|-0,05)$

Nur im Tiefpunkt ist die Tangente waagrecht.

weitere Varianten: grafische Lösung oder Steigung in der Nullstelle berechnen

c) 1. 1. Ableitung von f bilden

2. x -Stelle ($x = 1,5$) in 1. Ableitung einsetzen und k berechnen

3. Winkel mithilfe der Beziehung $\alpha = \arctan(k)$ berechnen

Ein negatives k ergibt einen Winkel im 2. Quadranten.

5) $\int_0^{12} (0,007 \cdot t^4 - 0,165 \cdot t^3 + 0,972 \cdot t^2 + 1,221) dt = 67,5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

6) Dreiecksfläche = $4 \cdot 8 / 2$ und Integral = 96 ergibt zusammen $16 + 96 = 112 \text{ Watt}$