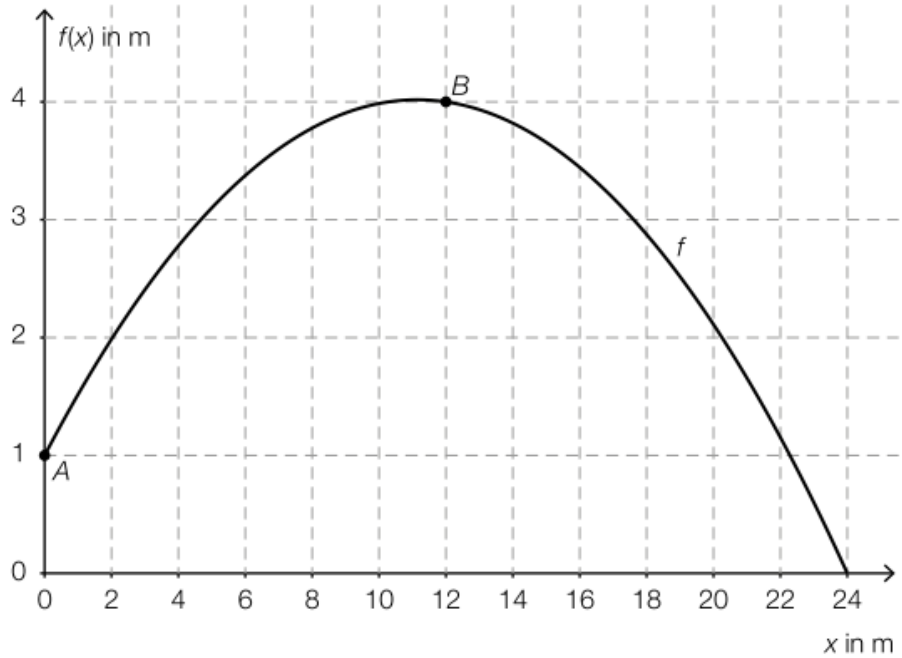
Beispiele zu Steigung

1) Beim Kugelstoßen wird die Höhe der Kugel durch die Funktion $h(x) = -0{,}08769x^2 + 1{,}7269x + 2$ angegeben. Dabei ist x die waagrechte Entfernung längs der Wurfbahn der Kugel.
   a) Berechnen Sie die Wurfhöhe beim Start (x=0)
   b) Berechnen Sie die Wurfweite und machen Sie eine Skizze des Wurfs.
   c) Erklären Sie, wie Sie die maximale Wurfhöhe mittels Differenzialrechnung erhalten können.
   d) Berechnen Sie Steigung und Steigungswinkel der Flugbahn beim Start.

2) Beim Skispringen ist folgender Zielhang vorgesehen (siehe Zeichnung):
   a) Bestimmen Sie die Hangneigung in 120m waagrechter Entfernung durch Einzeichnen einer Tangente an dieser Stelle des Hangs.
   b) Ein Skispringer startet im Ursprung und soll im Punkt (120|−80) landen. Beim Start fliegt er waagrecht weg.
   − Bestimmen Sie dafür die Konstante a der Funktion $f(x) = a \cdot x^2$
   c) Mit welcher Steigung trifft der Skispringer auf den Hang.

3) Der Verlauf einer Skater−Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden: $f(x) = 1/320 \cdot x^2$ mit $0 \le x \le 160$
   x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
   f(x) ... Höhe an der Stelle x in cm
   a) Berechnen Sie, welche Steigung und welchen Steigungswinkel die Rampe in 100 cm Entfernung vom Start hat
   b) Berechnen Sie, in welcher Entfernung und Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

4) Die Flugbahn eines Baseballs kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

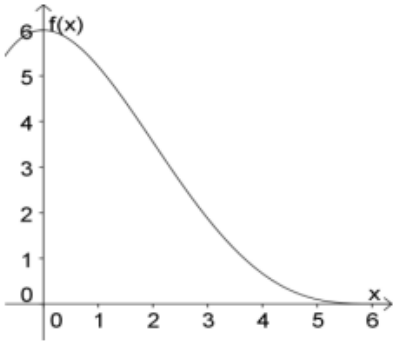


a) – Ermitteln Sie den Steigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und B.

b) – Zeichnen Sie die Tangente an die Kurve im Punkt A ein und bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in diesem Punkt.

c) – Erklären Sie die Bedeutung der momentanen Änderungsrate in diesem Sachzusammenhang.

5) Vom höchsten Punkt eines Hügels soll eine Rutsche herunterführen. Das Profil der geplanten Rutsche kann durch die folgende Funktion f annähernd beschrieben werden:



$$f(x) = -\frac{1}{72}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 432) \text{ mit } 0 \le x \le 6$$

Der Neigungswinkel einer Spielplatzrutsche darf laut Norm aus Sicherheitsgründen an keiner Stelle 60 Grad (°) überschreiten, und der mittlere Neigungswinkel der gesamten Rutsche darf nicht größer als 40° sein.

– Überprüfen Sie mithilfe einer Differenzialrechnung, ob die geplante Rutsche normgerecht ist.

6) Ein Wasserstrahl spritzt mit einer Funktion 2.Grades das Wasser ab. Der Wasserstrahl tritt am Start (x=0) in ein Meter Höhe aus und erreicht nach 3m waagrechter Entfernung seine maximale Höhe von 2,5 m.

a) Modellieren Sie eine passende Funktion zu dieser Angabe.

b) Berechnen Sie die Entfernung vom Start, wo der Wasserstrahl den Boden berührt.

c) Erklären Sie, wie Sie mit Hilfe der Differenzialrechnung den Austrittwinkel des Wasserstrahls (in Bezug auf die waagrechte Richtung) berechnen können.

7) In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines in ebenem Gelände geschlagenen Golfballs dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{216\,000} \cdot x^3 + \frac{x}{5}, \quad x \geq 0$$

x … waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls in Metern (m), wenn der Ball sich in x Metern Entfernung vom Abschlag befindet (Annahme: Der Golfball bewegt sich in einer Ebene.)

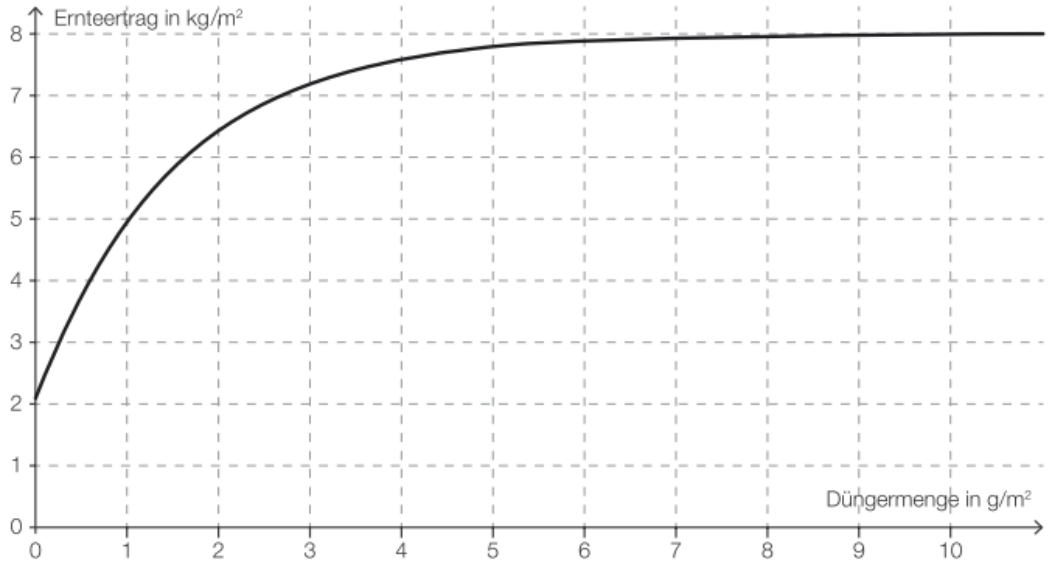
a) Ein 10 m hoher Baum, der genau in der Flugbahn des Golfballs steht, wird von diesem gerade noch überflogen. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Kennzeichnen Sie die möglichen Standorte des Baums in der Zeichnung und lesen Sie die Werte für die Entfernung des Baums vom Abschlag ab.

b) Der Ball fällt in einen Teich, der sich in derselben Höhe wie der Abschlag befindet. Dokumentieren Sie die erforderlichen Lösungsschritte zur Ermittlung des Winkels, unter dem der Ball eintaucht, ohne die Berechnung auszuführen.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Flugbahn mithilfe der Differenzialrechnung.

d) Begründen Sie, warum die gegebene Funktion höchstens einen Hochpunkt (lokales Maximum) haben kann.

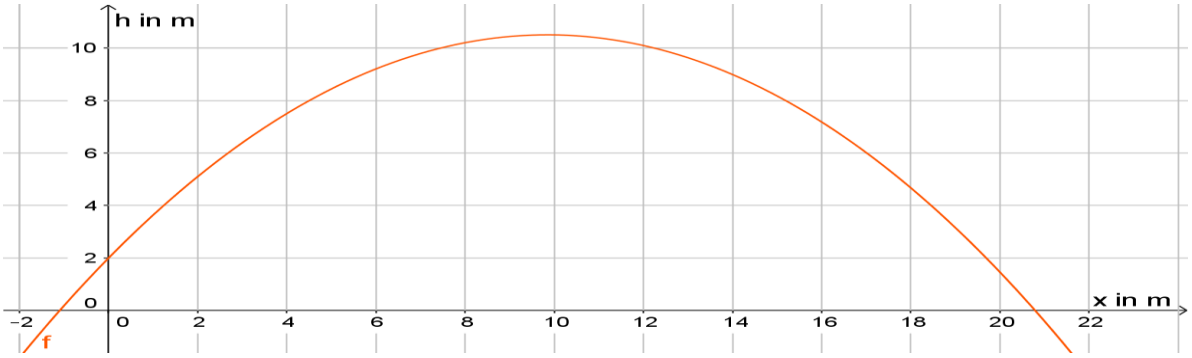
8) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf des Ernteertrags bei Anwendung eines speziellen Düngemittels, von dem maximal 11 g/m² ausgebracht werden dürfen.
Unter dem Begriff *Grenzertrag* bei einer bestimmten Düngermenge versteht man den Funktionswert der 1. Ableitung der Ertragsfunktion bei dieser Düngermenge.



– Lesen Sie aus der Grafik den Grenzertrag bei Verwendung einer Düngermenge von 1 g/m² ab.
– Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve ab einer Ausbringung von 8 g/m² Dünger im Sachzusammenhang.

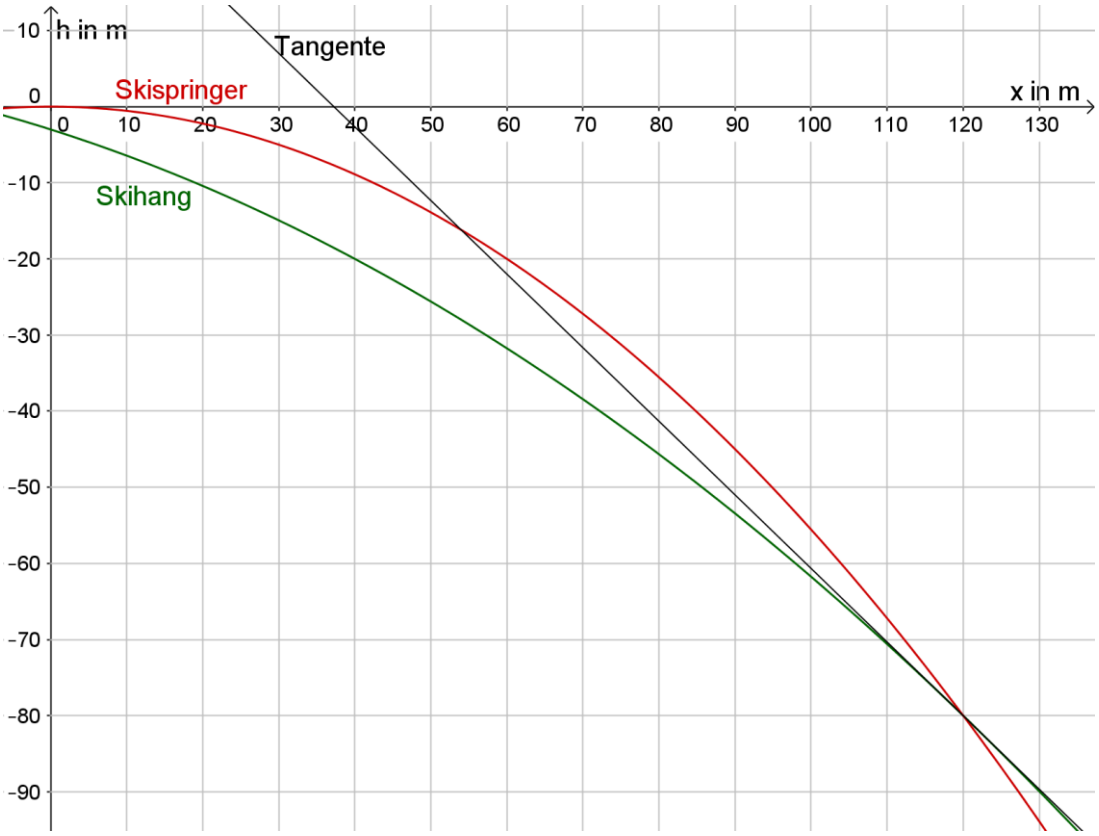
Lösung:

1) a) h(0)=2 ➔ Die Wurfhöhe beim Start ist 2 m
   b) h(x)=0 setzen ➔ $-0{,}08769x^2 + 1{,}7269x + 2 = 0$ ➔ mit GLG2 lösen: x=20,75 m Wurfweite



   c) Die maximale Wurfhöhe erhält man durch ABLEITEN–NULLSETZEN–RÜCKEINSETZEN aus der Funktion der Höhe
   d) Die Steigungsfunktion ist die erste Ableitung der Funktion: $f'(x) = -0{,}17538 \cdot x + 1{,}7269$
      Damit ergibt sich die Steigung bei x=0 ➔ f'(0)=1,7269
      Und daraus ergibt sich der Winkel mit arctan(1,7269) = 59,9°

2) a) Hangneigung in (120|−80) ca. −1 = −100% = −45°
   b) f(120)=−80 ➔ $a \cdot 120^2 = -80$ ➔ a = −1/180
   c) $f'(x) = -2/180 \cdot x$ ➔ f'(120) = −2/180*120 = −1,333

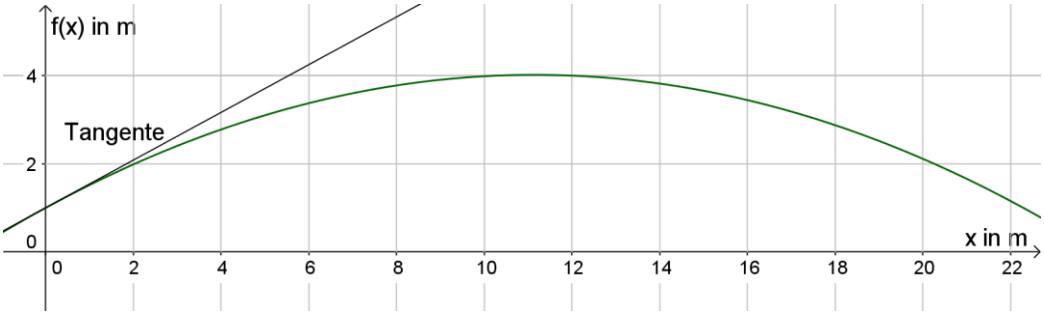


3) a) $f'(x) = 1/320 \cdot 2x$ ➔ f'(100) = 0,625 ➔ α = arctan(0,625) = 32°
   b) f'(x) = tan(30) ➔ $1/320 \cdot 2x = 0{,}57735$ ➔ x = 92,37 m waagrecht

4) a) Steigung Ist Differenzenquotient = $\frac{4-1}{12-0}$ = 1/3 Der Winkel ist α = arctan(1/3) = 18,43°

b) Momentane Änderungsrate ca. $\frac{4-1}{6-0}$ = ½

c) Die momentane Änderungsrate ist die Steigung der Kurve im Abschusspunkt.



5) $f(x) = -1/72\cdot(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 432)$ ➔ $f'(x) = -1/72\cdot(4x^3 - 48x^2 + 144x)$

Die maximale Steigung erhält man durch ABLEITEN−NULLSETZEN−RÜCKEINSETZEN der Steigungsfunktion: $f''(x) = -1/72\cdot(12x^2 - 96x + 144) = 0$ ➔ x=6 und x=2

Der Wendepunkt mit der stärksten Steigung ist also bei x=2. Dort ist die Steigung f'(2) = −1,777

Das ergibt den Steigungswinkel: α = arctan(−1,777) = −60,64 und das ist etwas zu viel (60°!)

Die mittlere Steigung ergibt sich aus dem Differenzenquotient: $\frac{0-6}{6-0}$ = −1 und daher −45° und das ist zu steil!

6) a) Mit Scheitelform: $f(x) = a\cdot(x-xs)^2 + ys$ Die Scheitelkoordinaten sind S(xs,ys) = (3|2,5)

Das ergibt eingesetzt: $f(x) = a\cdot(x-3)^2 + 2,5$

Mit Einsetzen des Start−Punktes (0|1) ergibt sich: $a\cdot(0-3)^2 + 2,5 = 1$ ➔ a = −1,5/9 = −1/6

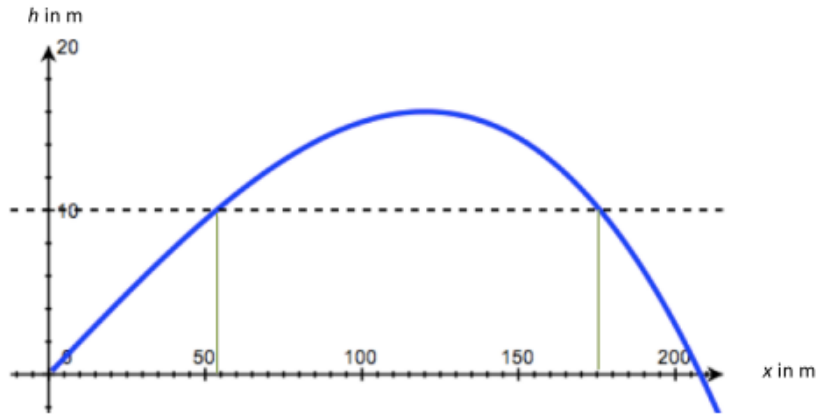
Damit ergibt sich die Funktion zu $f(x) = -1/6\cdot(x-3)^2 + 2,5$

Kann auch als Gleichungssystem angegeben werden

b) f(x) = 0 ➔ $-1/6\cdot(x-3)^2 + 2,5 = 0$ ➔ solver: 6,87 m waagrecht

c) Dazu muss man die erste Ableitung der Funktion berechnen und x=0 einsetzen. Das ergibt die Steigung. Mit arctan(Steigung) ergibt sich der Steigungswinkel

7) a)



Der Baum steht in ca. 54 m oder in ca. 176 m Entfernung vom Abschlag.
(Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)

b) Um den Winkel zu ermitteln, unter dem der Ball in den Teich eintaucht, sind folgende Schritte notwendig:

1. Eintauchstelle x_E ermitteln: $h(x_E) = 0,\ x_E \neq 0$
2. Steigung der Funktion an der Stelle x_E ermitteln: $k = h'(x_E)$
3. Eintauchwinkel α ermitteln: $\tan \alpha = k \Rightarrow \alpha = \arctan k$

(Hinweis: Auch andere, analoge Lösungswege sind zulässig.)

c) Ermittlung des Maximums:

$$h'(x) = -\frac{x^2}{72\,000} + \frac{1}{5}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 120$$

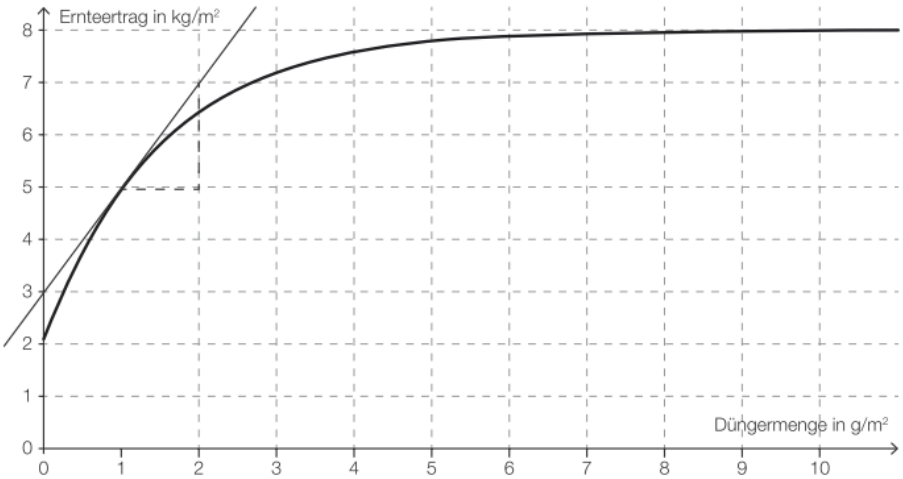
$$h(120) = 16 \Rightarrow M = (120|16)$$

Der höchste Punkt der Flugbahn ist der Punkt $M = (120|16)$. Der Golfball erreicht seine maximale Flughöhe von 16 m in einer waagrechten Entfernung von 120 m vom Abschlag.

d) $h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, ihre 1. Ableitung $h'(x)$ ist daher eine quadratische Funktion. Die Gleichung $h'(x) = 0$ hat höchstens 2 Lösungen, es gibt also maximal 2 lokale Extremwerte. Nur einer davon kann – da $h(x)$ stetig ist – ein Maximum sein.

(Auch andere Argumentationen sind möglich, z. B.:
$h(x)$ ist eine Polynomfunktion 3. Grades, mit maximal 3 Nullstellen, also höchstens einem lokalen Maximum.)

8)



Die Tangentensteigung im Punkt (1|5) = 2, d. h., bei einer Düngemittelmenge von 1 g/m² beträgt der Grenzertrag auf 1 m² Fläche pro g Düngemittel ungefähr 2 kg/m².
Ab ungefähr 8 g/m² erhöht sich der Ertrag bei höherem Düngereinsatz praktisch nicht mehr.