Differenzialrechnung

LINKS: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/diff1.htm
http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablgrenz
http://www.mathematik.net/0-calc_site_deutsch/applets/doukan/doukan.html

Bitte wiederholen Sie das Kapitel „Lineare Funktionen" – wir steigen dort wieder ein und bestimmen **Steigungen**:

k gibt die **Steigung** an in Vielfachen von 1 (z.B. bei der linearen Funktion y = k·x + d, hier: y = 0,20·x)

20% bzw. **Steigung k = 0.20**

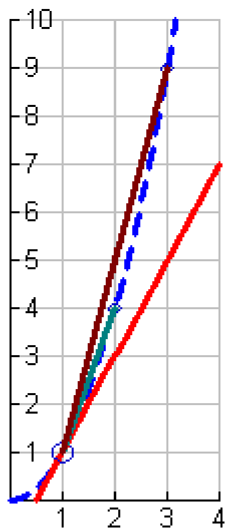
100% bzw. **1**

Grundsätzliche Aufgabenstellung der Differenzialrechnung: Steigungen bestimmen!!!

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion: $f(x) = x^2$ Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Punkt P(1|1) der Kurve
a) grafisch
b) durch eine Folge von Steigungen der Sehnen zwischen P und den Kurvenpunkten Q_1(3|.), Q_2(2|.), Q_3(1,1|.), Q_4(1,01|.)
c) nur für **M3**: durch den Grenzwert des Differenzenquotienten = Differenzialquotient

Lösung:
a) Zuerst muss man eine Wertetabelle der Funktion erstellen und sie dann zeichnen:

x	x^2
0	0
1.	1
2.	4
3.	9



b) Die Folge der Sehnen ist:

* zwischen (1|1) und (3|9): Steigung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$

* zwischen (1|1) und (2|4): Steigung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

* zwischen (1|1) und (1.1|1.21): Steigung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.21-1}{1.1-1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$

* zwischen (1|1) und (1.01|1.0201): Steigung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.0201-1}{1.01-1} = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01$

* zu vermuten ist der Grenzwert 2 für die Steigung der Tangente

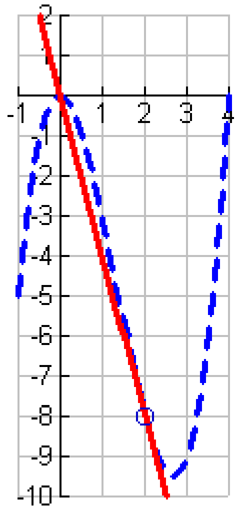
c) Der **Differenzenquotient** ist für diese Funktion: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} =$

$$\frac{1 + 2\cdot 1\cdot \Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

Der **Differenzialquotient** ist: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to\infty}(2+\Delta x) = 2$ **= Steigung der Tangente!**

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 – 4x^2$. Gesucht ist die Steigung im Punkt P(2|.)
a) grafisch
b) mit Hilfe der Ableitungsfunktion
c) Wo ist der Tiefpunkt (relatives Minimum)?

Lösung:
a) Wieder werden wir eine Wertetabelle erstellen und die Funktion zeichnen und eine Tangente dazuzeichnen – so gut es halt geht.



x	x^3-4x^2
0	0
1.	-3
2.	-8
3.	-9
4.	0

b) Die Ableitungsfunktion wird so berechnet:
$f'(x) = y' = 3 \cdot x^2 – 4 \cdot 2 \cdot x$
an der Stelle X=2 ergibt sich:
$f'(2) = y' = 3 \cdot 2^2 – 4 \cdot 2 \cdot 2 = 12 – 16 = -4$
Die Steigung ist –4!

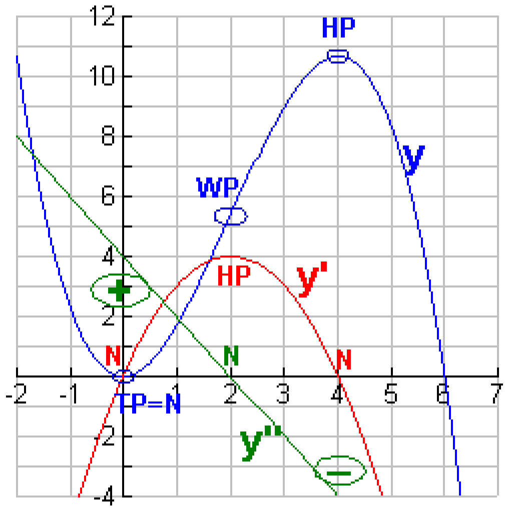
c) Wenn man die Zeichnung schlampig zeichnet, vermutet man den Tiefpunkt bei (3|-9). In Wirklichkeit ist er aber bei?
Hier müssen wir die Ableitungsfunktion Null setzen, dann erhalten wir den Punkt mit der Steigung Null:
$y' = 3x^2–8x = 0$
Das ist eine quadratische Gleichung mit 2 Summanden:
Herausheben von x liefert: $x \cdot (3x–8) = 0$
Also muss einerseits x=0 sein (wird der Hochpunkt) und andererseits ist: 3x-8=0, also: x=8/3= 2,666...
Eingesetzt in die Funktion erhalten wir den y-Wert des Tiefpunkts:
$f(2,666) = 2,666^3 – 4 \cdot 2,666^2$ **= -9,48**
→ TP(2,67|-9,48)

Ableitung der Potenzfunktion:

$$\boxed{f(x) = k \cdot x^n \rightarrow \quad f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}}$$

$y = 3x^3 + 2x^2 – 4x +2 \rightarrow y' = 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x^1 – 4$

Kurvendiskussion



Die Funktion f(x) = $-\frac{x^3}{3} + 2x^2$ wird abgeleitet zu:

f '(x) = $-x^2 + 4x$ und dies wird abgeleitet

zu: f ''(x) = $-2x + 4$

Diese drei Funktionen sind nebenan gezeichnet.

Es existiert jetzt folgender **Zusammenhang**:

Funktion f(x) = y	**1.Ableitung f '(x) = y'**	**2.Ableitung f ''(x) = y''**
Hochpunkt **HP**	Nullstelle **N**	negativ (verkehrte Schüssel) –
Tiefpunkt **TP**	Nullstelle **N**	positiv (Schüssel) +
Wendepunkt **WP**	Hochpunkt/Tiefpunkt **HP/TP**	Nullstelle **N**

Daraus ergibt sich folgendes Rezept für die Kurvendiskussion:

$y = -x^3/3 + 2x^2$	**$y' = -x^2 + 4x$**	**$y'' = -2x + 4$**
Nullstelle: Funktion Null setzen: $y = 0$ * Gleichung lösen (Herausheben, raten, Hornerschema, qu.Glg.-Lösungsformel) ergibt $x^2\cdot(-x/3+2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$ $\rightarrow$ **$N_1(0\|0)$** und **$N_2(6\|0)$**		
Extremwerte: **$x_1 = 0$ in y einsetzen:** $y_1 = -\mathbf{0}^3/3 + 2\cdot\mathbf{0}^2 = 0 \rightarrow$ **$E_1(0\|0)$** **$x_2 = 4$ in y einsetzen:** $y_2 = -\mathbf{4}^3/3 + 2\cdot\mathbf{4}^2 = 10{,}66 \rightarrow$ **$E_2(4\|10{,}66)$**	**1.Ableitung Null setzen: $y'=0$** * Gleichung lösen ergibt $x\cdot(-x+4) = 0$ $\rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 4$	 **$x_1 = 0$ in y'' einsetzen:** $y''_1 = -2\cdot 0+4 = 4$ ist **positiv** $\rightarrow$ **TP(0|0)** **$x_2 = 4$ in y'' einsetzen:** $y''_2 = -2\cdot 4+4 = -4$ ist **negativ** $\rightarrow$ **HP(4|10,66)**

$y = -x^3/3 + 2x^2$	**$y' = -x^2 + 4x$**	**$y'' = -2x + 4$**
Wendepunkte: **$x_w = 2$ in y einsetzen:** $y_w = -\mathbf{2}^3/3 + 2\cdot\mathbf{2}^2 = 5{,}33$ $\rightarrow$ **W(2|5,33)**		**2.Ableitung Null setzen: $y''=0$** * Gleichung lösen ergibt: $-2x+4=0 \rightarrow x_w = 2$

Wendetangente:

$x_w = \mathbf{2}$ **in y' einsetzen**:

$y'_w = -\mathbf{2}^2 + 4 \cdot \mathbf{2} = 4$

$\rightarrow \underline{k_w = 4}$

Wendepunkt und k_w in die allgemeine Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ einsetzen:

$5{,}33 = 4 \cdot 2 + d$

ergibt $\underline{d = -2{,}67}$

mit k und d ergibt sich die Tangentengleichung:

$\underline{\mathbf{t_w: y = 4x - 2{,}67}}$

Zur Wiederholung:
Lösung der Gleichung $x^3 - 7x + 6 = 0$ mittels raten (x = 1 ist Lösung) und danach Polynomdivision oder Hornerschema:

Polynomdivision:

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x - 1) = 1x^2$
$\underline{-(x^3 - 1x^2)}$
$0 \; - 1x^2$

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x - 1) = 1x^2 + 1x$
$\underline{-(x^3 - 1x^2)}$
$0 \quad 1x^2 - 7x$
$\underline{-(1x^2 - 1x)}$
$0 \quad -6x$

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x - 1) = 1x^2 + 1x - 6$
$\underline{-(x^3 - 1x^2)}$
$0 \; - 1x^2 - 7x$
$\underline{-(-1x^2 - 1x)}$
$0 \quad -6x \; +6$
$\underline{-(-6x + 6)}$
$0 \quad 0$

Horner-Schema: (links mal, rechts oben plus)

x	x^3	x^2	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1			

x	x^3	x^2	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1		

x	x^3	x^2	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1	-6	

x	x^3	x^2	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1	-6	0
	$\mathbf{1x^2}$	$\mathbf{+1x}$	$\mathbf{-6}$	

danach Lösung der quadratischen Gleichung: $x^2 + x - 6 = 0$ mit der Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, $\rightarrow$ ergibt: $x_1 = -0{,}5 + 2{,}5 = \mathbf{2}$ und $x_2 = -0{,}5 - 2{,}5 = \mathbf{-3}$ **und (!!!)** $x_3 = \mathbf{1}$