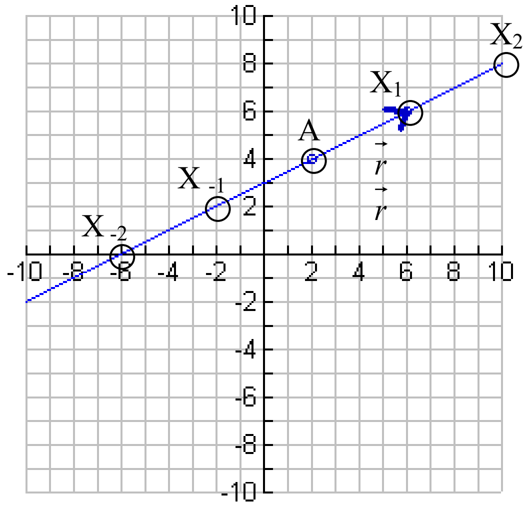
Geradendarstellung in Paramterform



Die Punkte auf einer Geraden lassen sich folgendermaßen finden:
Gegeben sei der Punkt A und der Richtungsvektor $\vec{r}$. Dann ergibt sich:

$X_1 = A + 1 \cdot \vec{r}$	$X_2 = A + 2 \cdot \vec{r}$	$X_3 = A + 3 \cdot \vec{r}$	....	$X_t = A + t \cdot \vec{r}$

Daraus folgt die **Geradendarstellung in Parameterform** (Parameter t)

$$\boxed{\mathbf{g: X = A + t \cdot \vec{r}}}$$

Beispiel 1:
a) Gesucht ist die Parameterdarstellung der Geraden g durch A(-3|2) und B(5|-3).
b) Ist C(-19|12) auf der Geraden g ?

Lösung:

a) g: $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

g: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$

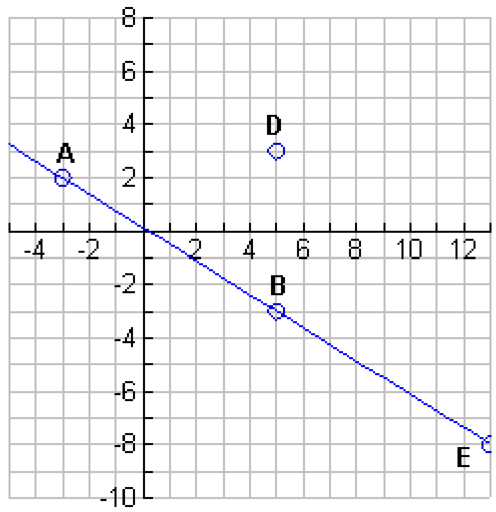
b) Wir setzen C für X ein:

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und spalten die Gleichung waagrecht in 2 Zeilen:

$$\left\{ \begin{array}{l} -19 = -3 + 8t \\ 12 = 2 - 5t \end{array} \right.$$

und lösen die beiden Gleichungen in t auf:
-19 = -3 +8t → -16 = 8t → -2 = t
12 = 2 – 5t → 10 = -5t → -2 = t
da die beiden Lösungen für t gleich sind, liegt C auf g.



Beispiel 2:

a) Erstellen Sie eine parallele Gerade h_1 zu g: X= $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$ durch Q(1|4)

b) Erstellen Sie eine normale Gerade h_2 zu g durch Q

Lösung:

a) Eine **parallele** Gerade hat den gleichen Richtungsvektor wie g, der Startpunkt ist allerdings anders:

h_1: X= $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$

b) Eine **normale** Gerade hat den gekippten Vektor als Richtungsvektor: $\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}^L=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$

h_2: X= $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$

Geraden schneiden – das ergibt einen Schnittpunkt:

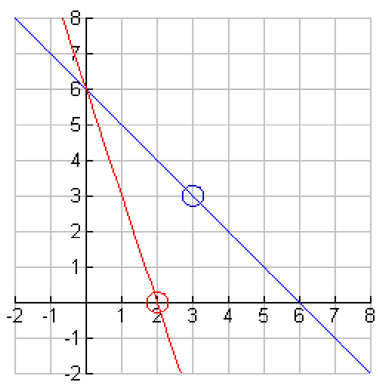
Beispiel:

Welchen Schnittpunkt erzeugen die Geraden g: X = $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ mit h: X = $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$?

Lösung:

Wenn der gemeinsame Schnittpunkt X von beiden Geraden gesucht wird, muss X=X gelten und daher kann man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleich setzen:

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$



Nun kommt der Hammer  und hackt das in zwei Zeilen:

$$\left\{\begin{array}{l}3+3t=2+1s\\3-3t=0-3s\end{array}\right.$$

und wir haben Glück, durch einfache Addition der Gleichungen verschwindet der Parameter t:

6 = 2 – 2s → 4 = -2s → -2 = s

Und dann setzen wir s dort ein, wo es vorkommt:

$$X=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

Damit haben wir den Schnittpunkt S(0|6) erhalten !!!

Höhenschnittpunkt – Umkreismittelpunkt – Schwerpunkt beim Dreieck

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2|-2) B(7|3) C(-2|6)
Zeichnen und berechnen Sie den Höhenschnittpunkt

Lösung:
Als **erstes** brauchen wir die Höhe auf die Seite AB, die durch den Eckpunkt C geht und rechtwinkelig zu AB verläuft. Somit müsste die Parameterdarstellung lauten: h_{AB}: $X = C + t \cdot \overrightarrow{AB}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

dann kippen wir den Vektor nach links: $\overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

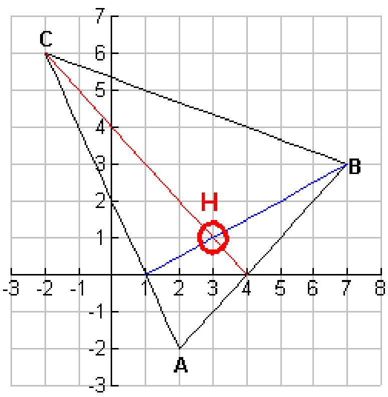
und setzen ein in die Formel: h_{AB}: $X = C + t \cdot \overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Als **zweites** brauchen wir die Höhe auf die Seite BC, die durch den Eckpunkt A geht und rechtwinkelig zu BC verläuft: h_{BC}: $X = A + s \cdot \overrightarrow{BC}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

dann kippen wir den Vektor nach links: $\overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

und setzen ein in die Formel: h_{BC}: $X = A + s \cdot \overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$



Und der **dritte** Streich ist das Schneiden der beiden Höhen:

$h_{AB} \cap h_{BC}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Nun kommt der Hammer und hackt das in zwei Zeilen:

$-2 - 5t = 2 - 3s$
$\underline{6 + 5t = -2 - 9s}$

addiert ergibt sich: $4 = 0 - 12s \rightarrow s = 4/-12 = -1/3$

und nun *setzen wir s dort ein, wo es vorkommt* (!!):

X =

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1/3) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \cdot (-3) \\ -1/3 \cdot (-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 \\ +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist unser **Höhenschnittpunkt**: **H(3|1)**

Der Umkreismittelpunkt wird so ähnlich ermittelt. Die **Streckensymmetralen** sind auch senkrecht auf die Seiten, gehen aber durch den **Seitenmittelpunkt**: $M_{AB} = \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2|-2) B(7|3) C(-2|6)
Zeichnen und berechnen Sie den Umkreismittelpunkt

Lösung:
Als **erstes** brauchen wir die Seitensymmetrale auf die Seite AB, die durch den Punkt M_{AB} geht und rechtwinkelig zu AB verläuft. Somit müsste die Parameterdarstellung lauten: s_{AB}: $X = M_{AB} + t\cdot \overrightarrow{AB}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ und kippen wir den Vektor: $\overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

dann berechnen wir den Mittelpunkt der Seite AB: $MAB = \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

und setzen ein in die Formel: s_{AB}: $X = M_{AB} + t\cdot \overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

Als **zweites** brauchen wir die Seitensymmetrale auf die Seite BC, die durch den Punkt M_{BC} geht und rechtwinkelig zu BC verläuft. s_{BC}: $X = M_{BC} + s\cdot \overrightarrow{BC}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ und kippen wir den Vektor: $\overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

dann berechnen wir den Mittelpunkt der Seite AB: $M_{BC} = \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}}{2} = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$

und setzen ein in die Formel: s_{BC}: $X = M_{BC} + s\cdot \overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

Und der **dritte** Streich ist das Schneiden der beiden Seitensymmetralen:

$s_{AB} \cap s_{BC}$: $\begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

Nun kommt der Hammer und hackt das in zwei Zeilen:

$4{,}5 - 5t = 2{,}5 - 3s$
$\underline{0{,}5 + 5t = 4{,}5 - 9s}$

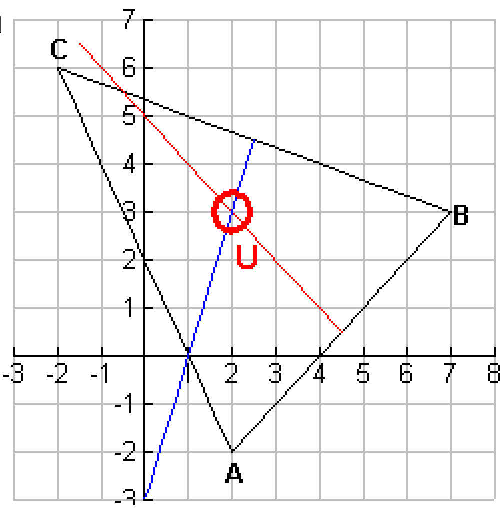
addiert ergibt sich: $5 \quad = 7 - 12s \rightarrow s = -2/-12 = 1/6$

und nun *setzen wir s dort ein, wo es vorkommt* (!!):

$X = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + (1/6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/6\cdot(-3)\\1/6\cdot(-9)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Damit ist unser **Umkreismittelpunkt**: **U(2|3)**



Zum Abschluss der **Schwerpunkt**, der diesmal ganz leicht ist:

$$S = \frac{A+B+C}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}3 \\ 2{,}3 \end{pmatrix}$$

EULER'sche Gerade: Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt liegen auf einer Geraden und der Schwerpunkt drittelt die Strecke HU.