Dr.Manfred Gurtner 2005

Extrakapitel für M3

1. Integration durch Substitution

(Umkehrung der Kettenregel)

Beispiel 1:

Berechnen Sie das Integral $I = \int 5\sqrt{4+5x}\; dx$

Lösung:

a) Da die Wurzel eine innere Funktion hat, **substituieren** wir diese:

z = 4+5x

b) Diese Funktion müssen wir **ableiten**:

z' = 5

c) Damit setzen wir das **Integral neu** an:

$$I = \int 5\sqrt{4+5x}\; dx = \int 5\sqrt{z}\,\frac{dz}{z'} = \int 5\sqrt{z}\,\frac{dz}{5}$$

d) und **integrieren** nach der neuen Variablen z

$$I = \int 5\sqrt{z}\,\frac{dz}{5} = \int \sqrt{z}\; dz = \int z^{\frac{1}{2}}\; dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$$

e) dann kann wieder **rücksubstituiert** werden und C dazugeschrieben werden:

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{z^3} = \frac{2}{3}\sqrt{(4+5x)^3} + C$$

Übungen:

1a) $\int (1+x)^4\, dx$	1b) $\int (3x-2)^3\, dx$	1c) $\int (2-x)^3\, dx$
2a) $\int x\,(3x^2-1)^2\, dx$	2b) $\int x(5-7x^2)^2\; dx$	2c) $\int x(3-2x^2)\; dx$
3a) $\int (7-71x)^{-2}\; dx$	3b) $\int \frac{x^2}{(5-4x^3)^3}\; dx$	3c) $\int \frac{4x-14}{(x^2-7x+6)^4}\; dx$
4a) $\int \sqrt{2x-2}\; dx$	4b) $\int \sqrt[3]{(3-2x)^2}\; dx$	4c) $\int \sqrt[5]{x(\frac{1}{x}-5)}\; dx$
5a) $\int 2x\sqrt{x^2-5}\; dx$	5b) $\int x\sqrt{x^2+5}\; dx$	5c) $\int -x\sqrt{x^2-1}\; dx$
6a) $\int (5x-12)^{-1/2}\; dx$	6b) $\int \frac{2x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}\; dx$	6c) $\int \frac{5-2x}{\sqrt{(x^2-5x+6)^3}}\; dx$
7a) $\int \frac{1}{5+x}\; dx$	7b) $\int \frac{x}{x2+1}\; dx$	7c) $\int \frac{x}{1-x^2}\; dx$
8a) $\int \frac{2x^3}{5-x^4}\; dx$	8b) $\int \frac{4x^3+8x}{(x^2+2)^2}\; dx$	8c) $\int \frac{x(x^3-3)}{(3-x^2)^2}\; dx$

2. Integration durch partielle Integration

(Umkehrung der Produktregel)

Beispiel 2:

Berechnen Sie das Integral $I = \int x \cdot e^x \; dx$

Lösung:

Die Umkehrung der Produktregel ergibt folgende Integrationsregel:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Schritt 1: Bestimmen, was u und was dv sein soll

$$I = \int x \cdot e^x \; dx = \int u \cdot dv$$

Schritt 2: Tabelle zur Bestimmung der Ableitungen und Integrale:

u = x ➔ u'=du = 1

dv = e^x ➔ v = $\int dv$ = e^x

Schritt 3: Anwenden der Regel:

$$I = \int x \cdot e^x \; dx = u \cdot v - \int v \cdot du =$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx$$

Schritt 4 : Weitere Umformungen folgen:

$$I = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

Beispiel 3:

Mehrfache partielle Integration $\int x^2 \cdot \sin x \; dx$

Lösung:

1.partielle Integration: $\int x^2 \cdot \sin x \; dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) \; dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \; dx$

2.partielle Integration: $= -x^2 \cos x + 2 \cdot \left[x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \; dx \right]$

und endgültige Integration: $= -x^2 \cos x + 2 \cdot [x \cdot \sin x - (-\cos x)] + C =$

$= -x^2 \cos x + 2 \cdot x \cdot \sin x + 2 \cos x + C$

<u>Übungen:</u>

-

1a) $\int x \cdot e^{-x} dx$	1b) $\int x^2 e^x dx$	1c) $\int x \cdot 2^x dx$
2a) $\int x \cdot e^{-x} dx$	2b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	2c) $\int \ln x \; dx$
3a) $\int x \cdot \ln x \; dx$	3b) $\int x^2 \cdot \ln x \; dx$	3c) $\int x \cdot \sin x \; dx$
4a) $\int x \cdot \cos x \; dx$	4b) $\int x \cdot \cos 2x \; dx$	4c) $\int x^2 \cdot \cos 3x \; dx$
5a*) $\int \sin^2 x \; dx$	5b*) $\int \cos^2 x \; dx$	5c*) $\int \sin x \cdot e^x dx$
6a*) $\int \sin x \cdot \cos x \; dx$	6b) $\int x \cdot \sin 2x \; dx$	6c) $\int x \cdot (1-x)^{10} \; dx$

*) die partielle Integration führt zum Ausgangsintegral ➔ Integralgleichung

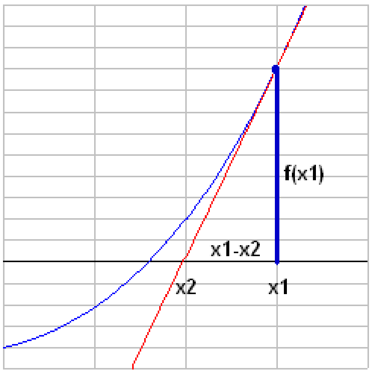
3. Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

Eine Funktion ist nicht immer nett und hat ganzzahlige Nullstellen. Wie kommt man auf den x-Wert der Nullstelle? Dazu gibt es Näherungsverfahren:

Beispiel:
Systematisches Probieren: Gesucht ist die Nullstelle der Funktion: $f(x) = x^3 - x - 4$

Lösung:
Dazu erstellen wir einfach eine Wertetabelle und suchen intelligent:

x	**f(x)**	
0	–4	Start
1	–4	
2	2	oh, die Funktion springt, nächster Wert muss zwischen 1 und 2 liegen, eher bei 2
1,7	–0,787	gut wäre jetzt ein Wert zwischen 1,7 und 2, eher bei 1,7
1,8	0,032	das ist schon sehr gut, das wäre die Lösung auf eine Kommastelle genau



Die Methode beim Newtonverfahren ist nun folgende: man sucht sich eine Näherung x1 der Nullstelle und berechnet damit f(x1) und f '(x1). Mit Hilfe der Tangente in (x1, f(x1)) sucht man den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse auf und hat eine neue Näherung der Nullstelle, diesmal näher.
Die Beziehung lautet also: Die Steigung k der Tangente ist gleich der ersten Ableitung. Für die Steigung gilt der Tangens: Gegenkathete durch Ankathete:

$$k = f'(x1) = \frac{f(x1)}{x1 - x2} \rightarrow x1 - x2 = \frac{f(x1)}{f'(x1)} \rightarrow \boxed{x2 = x1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}}$$

Beispiel:
Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - x - 4$ mit dem **Newtonverfahren** auf 3 Kommastellen genau

Lösung:

x	f(x)	f ' (x)	x – f (x) / f '(x)
2,5	9,125	17,75	1,9859
1,9859	1,8462	10,8316	1,8155
1,8155	0,1681	8,8877	1,7965
1,7965	0,0019	8,6827	**1,796**3

Die Nullstelle ist 1,796 auf 3 Kommastellen genau !

Übungen:
Bestimmen Sie die Nullstelle der gegebenen Funktion mit dem Newtonverfahren (ev. mit dem gegebenen Startwert x1) auf 3 Kommastellen genau

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ x1 = 0,5 2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ x1= 0,5 oder –1
3) $f(x) = x^3 - 5x + 1$ x1=2 4) $x^3 - 4x^2 + 6x - 2$ 5) $x^3 - x^2 - 10x + 12 = 0$

Lösungen: 1) 0,347 2) –1,242 3) 2,128 4) 0,456 5) 3 und 1,236 und –3,236

4. Numerische Integrationsmethoden

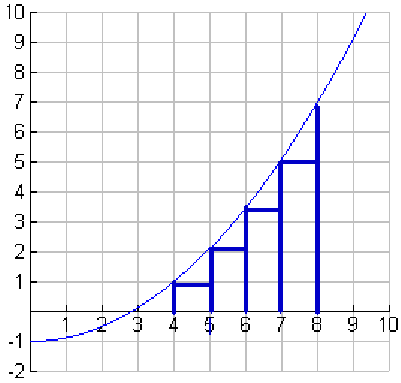
Es gibt nette Integrale, die sich mit der Stammfunktion lösen lassen: $\int_1^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$

Aber auch solche, bei denen es keine Stammfunktion gibt: $\int e^{x^2} dx$

Darum ist es auch notwendig, numerische Methoden für die Integration zu entwickeln.

a) Rechteckmethode:

Unter der Funktion kann man eine Treppe einbauen, das sieht als Summe von Teilflächen folgendermaßen aus:



$$\sum f(xi) * \Delta x = f(4)*1 + f(5)*1 + f(6)*1 + f(7)*1$$

Dies ist natürlich eine sehr schlechte Näherung, wie man an folgendem Beispiel erkennen kann:

$f(x) = x^2 / 8 - 1$

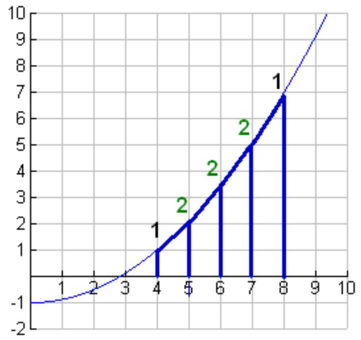
$\sum f(xi) * \Delta x = f(4)*1 + f(5)*1 + f(6)*1 + f(7)*1 =$

= 1*1 + 2,125*1 + 3,5*1 + 5,125*1 = **11,75**

- (exakt wäre: 14,66...)

b) Trapezmethode:

Jetzt werden die Funktionswerte an den auszuwertenden Stellen miteinander verbunden. Die Fläche



ergibt sich aus der Trapezformel: Fläche 1 = $\frac{f(4)+f(5)}{2} * \Delta x$

Alle Flächen zusammen ergeben:

$$A = \sum \frac{f(xi+\Delta x)+f(xi)}{2} \cdot \Delta x = \frac{f(4)+f(5)}{2} * 1 + \frac{f(5)+f(6)}{2} * 1 \ldots$$

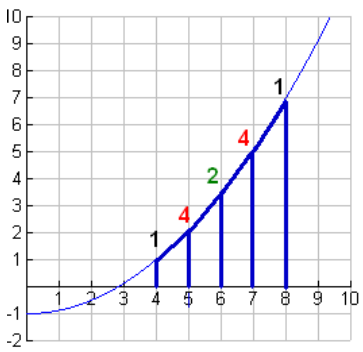
$$= \frac{f(4)+2*f(5)+2*f(6)+2*f(7)+f(8)}{2} * 1$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

(1 + 2*2,125 + 2*3,5 + 2*5,125 + 7) / 2 * 1 = **14,75**

– um Welten besser als mit Rechtecken

c) Simplexmethode:



Wie man sieht, führt eine andere Bewertung der Zwischenwerte zu einem besseren Ergebnis. Wie wäre es, wenn man nebenstehende Bewertung nimmt:

$$A = (1*f(4)+4*f(5)+2*f(6)+4*f(7)+1*f(8)) * \frac{\Delta x}{3}$$

Die Bewertung der Funktionswerte erfolgt abwechselnd mit den Zahlen 1,4,2,4,2,4,2,4,2,4,...,2,4,1

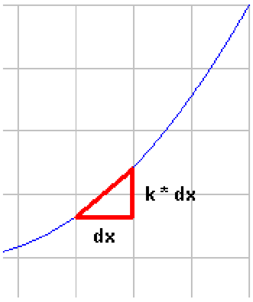
Für unser Beispiel ergibt sich:

A = (1*1 + 4*2,125 + 2*3,5 + 4*5,125 + 1*7) / 3 *1 = **14,66...**

das ist der exakte Wert (gilt nur für quadratische Funktionen!)

<u>Übungen</u>: Berechnen Sie mit allen 3 Methoden folgende Integrale und vergleichen Sie mit dem exakten Wert: 6a) $\int_0^4 (4-x)^2 \cdot dx$ (=64/3) 6b) $\int_4^8 \sqrt{x-4} \cdot dx$ (= 16/3) 6c) $\int_0^4 e^{-x^2} dx$ (=0,886227)

5. Kurvenlängenberechnung:



Die Länge des eingezeichneten Kurvenstücks bekommt man, wenn man den Satz des Pythagoras anwendet:

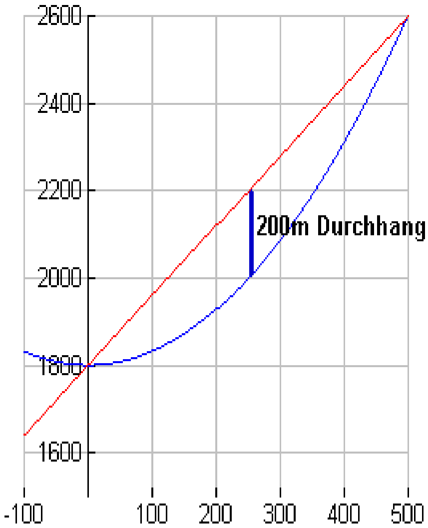
$dl = \sqrt{dx^2 + (k \cdot dx)^2} = dx \cdot \sqrt{1+k^2} = dx \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}$

Die **Kurvenlänge** bekommt man durch die Integration:

$$\boxed{L = \int dl = \int \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx}$$

Beispiel:
Eine Seilbahn soll zwischen der Talstation in 1800m und der Bergstation in 2600m errichtet werden. Waagrechter Abstand im Grundriss der beiden Stationen ist 500m. Die Seilbahn soll eine Durchhang von 200m haben. Wie lang ist das nötige Seil?

Lösung:



Die Funktion, die wir aufstellen müssen, ergibt sich aus folgenden Bedingungen: Talstation (0 | 1800), Bergstation (500 | 2600) und Durchhangpunkt (250 | (1800+2600)/2-200 = 2000)
Der Durchhang ist ein Polynom 2.Grades, also muss mit umgekehrter Kurvendiskussion die Funktion bestimmt werden:
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f(0) = 1800 \rightarrow 1800 = c$
$f(500) = 2600 \rightarrow 2600 = a \cdot 500^2 + b \cdot 500 + 1800$
$f(250) = 2000 \rightarrow 2000 = a \cdot 250^2 + b \cdot 250 + 1800$

Nach Lösung des Gleichungssystems ergibt sich:
$f(x) = 2x^2/625 + 1800$
$f'(x) = 4x/625$
Die Kurvenlänge ergibt sich aus dem Integral:

$$\int_0^{500} \sqrt{1+f'(x)^2} \cdot dx = \int_0^{500} \sqrt{1+\frac{16x^2}{625^2}} \cdot dx$$

Da wir dieses Integral nicht kennen, verwenden wir Simpson mit der Funktion g(x) = $\sqrt{1+\frac{16x^2}{625^2}}$

L = (1*g(0) + 4* g(125) + 2* g(250) + 4* g(375) + 1* g(500)) / 3 * 125 =
= (1*1 + 4* 1,28 + 2*1,89 + 4*2,6 + 1*3,35) / 3 * 125 = **<u>985 m</u>**

<u>Übungen:</u>
7)Berechnen Sie die **Kurvenlängen** der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall:
a) $y = x^2$ [1,4] b) $y = x^3-1$ [-2,1] c) $y = \sin(x)$ $[0,\pi]$
8) Es ist der Umfang der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ zu berechnen
9) Es ist die Länge der Kurve $y= 1/(1+x^2)$ im Intervall[-1,1] zu ermitteln
10) Berechnen Sie das **Volumen**, wenn folgende Funktionen um die x-Achse rotieren (mit der Formel $V = \pi\int_{x1}^{x2} f(x)^2 \cdot dx$) in den angegebenen Grenzen a und b (+ Zeichnung dazu)

	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**	**g)**	**h)**
f(x)	2x	5	$\sqrt{x}$	$\sqrt{25-x^2}$	x^2	x^2+1	$3\sqrt{1-0,01x^2}$	x^2-5x
a	0	0	0	x-Achse	0	-1	x-Achse	x-Achse
b	10	3	4	x-Achse	3	3	x-Achse	x-Achse

Lösungen:

7) 15,34   63,12   3,66 (Rad!)   8) 15,87   9) 2,26   10)

a) 4188,79	b) 235,6	c) 25,13	d) 523,6	e) 152,7	f) 224,5	g) 377	h) 327,2

6. Reihenentwicklungen:

Die Funktionen, die der Taschenrechner auszurechnen hat, werden intern als Potenzfunktion berechnet. Es gilt:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \ldots = \sum_{ungerade\, n} \frac{(-1)^{(n-1)/2} \cdot x^n}{n!}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \ldots = \sum_{gerade\, n} \frac{(-1)^{n/2} \cdot x^n}{n!}$$

$$\tan(x) \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} \ldots = \sum_n \frac{x^n}{n!}$$

Wie kann man diese Reihen selber aufstellen?
Dazu gibt es die **Taylorformel**:
$f(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2/2! + d\cdot x^3/3! + e\cdot x^4/4! + \ldots$
die Koeffizienten sind: $a = f(0)$, $b = f'(0)$, $c = f''(0)$, $d = f'''(0)$, usw.

Beispiel:

Berechnen Sie die ersten 5 Koeffizienten der Taylorreihe der Funktion f(x) = $\frac{1}{1-x}$

Lösung:

Ableitungen	$f(x) = (1-x)^{-1}$	$f'(x) = (1-x)^{-2}$	$f''(x) = 2\cdot(1-x)^{-3}$	$f'''(x) = 2\cdot 3\cdot(1-x)^{-4}$	$f''''(x) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot(1-x)^{-5}$
Null einsetzen	$f(0) = 1$	$f'(0) = 1$	$f''(0) = 2$	$f'''(0) = 2\cdot 3$	$f''''(0) = 2\cdot 3\cdot 4$
Koeffizienten	1	1	$2/2 = 1$	$2\cdot 3/3! = 1$	$2\cdot 3\cdot 4/4!$

Das ergibt die Taylorreihe: $\mathbf{f(x) \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}$

Für große Werte von x wird die Taylorreihe aber eher divergieren. Wie kann man das genauer bestimmen?

Der **Konvergenzradius** der Taylorreihe ist]-r,r[, wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$

Beispiel:

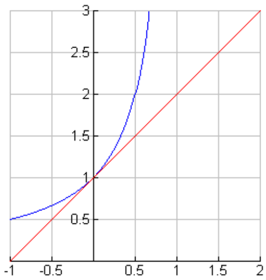
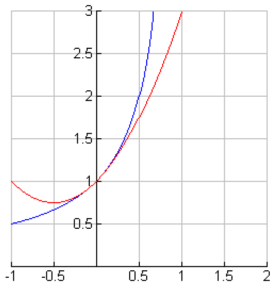
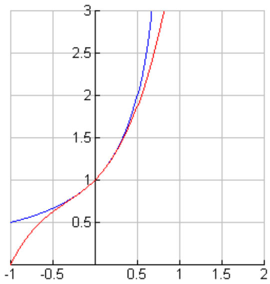
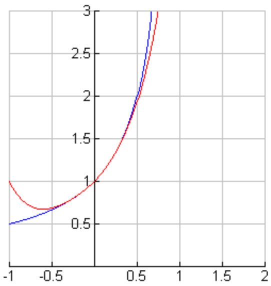
Berechnen Sie den Konvergenzradius für die Taylorreihe der Funktion f(x) = $\frac{1}{1-x}$

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

Der Konvergenzradius ist 1, größere Werte als 1 sollten also nicht mehr eingesetzt werden, das liefert schlechte Ergebnisse

Wie sieht nun die Approximation grafisch aus?

 $f(x) \approx 1+x$	 $f(x) \approx 1+x+x^2$	 $f(x) \approx 1+x+x^2+x^3$	 $f(x) \approx 1+x+x^2+x^3+x^4$

Die Funktionsapproximation wird zunehmend besser

Übungen:

11) Approximieren Sie folgende Funktionen mit einer **Taylorreihe** und bestimmen Sie den **wirklichen Fehler** bei x = 1 zwischen Funktion und Approximation, den **Konvergenzradius** und eine **Zeichnung**:

a) $f(x) = e^x$ durch eine Taylorreihe dritten Grades
b) $f(x) = x^3 - x$ durch eine quadratische Taylorreihe
c) f(x) = sin(x) durch eine Taylorreihe 5.Grades
d) f(x) = ln(1-x) durch eine Taylorreihe 4.Grades
e) $f(x) = \sqrt{1+x}$ durch eine Taylorreihe 2.Grades

Lösungen:

11a) t(x) = $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ Fehler = 0,05 r =1	11b) t(x) = $-x$ Fehler = –1 r = unendlich	11c) t(x) = $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ Fehler = -0.0002 r = unendlich	11d) t(x) = $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ Fehler = unendlich, r = 1	11e) t(x) = $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ Fehler = 0,039 r = 1