Integralrechnung

<u>Übungen:</u> **<u>Stammfunktionen bilden</u>**

Ermittle die Stammfunktionen $F(x) = \int f(x) \cdot dx$ der folgenden Funktionen mit der Regel

$$\boxed{\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

1) $f(x) = 3x$
2) $f(x) = 8x^3$
3) $f(x) = x^2 + x$
4) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
5) $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^3$
6) $f(x) = x^2/3 + x/4$
7) $f(x) = x^4/10 - 3x^2 + 2/3$
8) $f(x) = 1/x^2 = x^{-2}$
9) $f(x) = 1/x^3 = x^{-3}$
10) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

Ermittle in den folgenden Beispielen die Gleichung der Kostenfunktion, wenn die 1.Ableitung (Grenzkosten) und eine weitere Angabe existiert.

Beispiel: Eine Kostenfunktion hat die Ableitung $K'(x) = 2x$; der Graph geht durch den Punkt P(2/7), also bei 2 Stück sind die Gesamtkosten 7€
Lösung: $K(x) = \int 2x \cdot dx = x^2 + C$ *und Koordinaten von P einsetzen:*
$7 = 2^2 + C \Rightarrow C = 3$
➔ $\underline{\underline{K(x) = x^2 + 3}}$

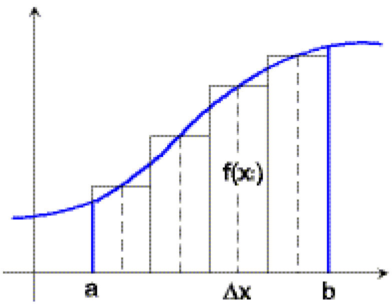
11) $K'(x) = 4x$; Fixkosten F = 30 €
12) $K'(x) = 2x + 3$; Fixkosten F = 20 €
13) $K'(x) = x/10 + 1/20$; Fixkosten F = 15 €
14) $K'(x) = 2x - 0{,}5$; bei x = 20 Stück betragen die Gesamtkosten K(20) = 440 €
15) $K'(x) = 3x^2 - 64x + 340$; bei 10 Stück betragen die Gesamtkosten 1300 €
16) $K'(x) = 0{,}06\,x + 0{,}5$; bei 30 Stück betragen die Gesamtkosten 92 €
17) $K'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}8x + 6$; bei 100 Stück sind die Gesamtkosten 6800 €
18) $K'(x) = x/10 + 1/2$; die Stückkosten betragen bei 10 Stück 5 €

<u>Lösungen:</u> Stammfunktionen	
1) $F(x) = 3x^2/2 + C$	11) $K(x) = 2x^2 + 30$
2) $F(x) = 2x^4 + C$	12) $K(x) = x^2 + 3x + 20$
3) $F(x) = x^3/3 + x^2/2 + C$	13) $K(x) = x^2/20 + x/20 + 15$
4) $F(x) = x^3 + 2x^2 + x + C$	14) $K(x) = x^2 - 0{,}5x + 50$
5) $F(x) = x^7/7 - x^6/2 + 7x^4/4 + C$	15) $K(x) = x^3 - 32x^2 + 340x + 100$
6) $F(x) = x^3/9 + x^2/8 + C$	16) $K(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}5\,x + 50$
7) $F(x) = x^5/50 - x^3 + 2x/3 + C$	17) $K(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}4x^2 + 6x + 200$
8) $F(x) = -x^{-1} + C = -1/x + C$	18) $K(x) = x^2/20 + x/2 + 40$
9) $F(x) = x^{-2}/-2 + C = -1/(2x^2) + C$	
10) $F(x) = x^{3/2} / {}_{3/2} + C = 2/3 \cdot \sqrt{x^3} + C$	

Das bestimmte Integral

Die Funktion f(x) sei gegeben; wir wollen die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [a, b] berechnen.

Einen Näherungswert erhält man, wenn man [a, b] in Teilintervalle der Länge Δx teilt, in jedem Intervall eine Stelle x_i wählt und die Flächeninhalte der Rechtecke $\Delta x \cdot f(x_i)$ addiert:
$A \approx (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)) \cdot \Delta x$,
in Summenschreibweise:



$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Die Fläche - das **bestimmte Integral** - definieren wir als Grenzwert dieser Summe, wenn Δx gegen 0 geht; man schreibt:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

sprich "Integral von a bis b von f(x)dx" (das Integralzeichen soll an S für "Summe" erinnern).

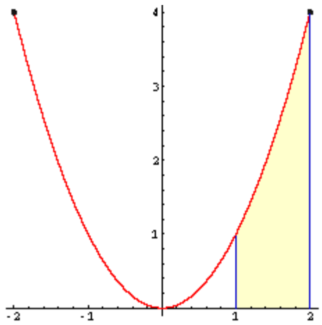
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

das heißt, die Fläche unter dem Graphen von f(x) ist eine Stammfunktion von f.

Beispiel:

Wir suchen die Fläche unter dem Graphen der Funktion f(x) = x² zwischen den Grenzen a = 1 und b = 2.



$$\int_1^2 x^2 dx =$$ *Stammfunktion finden*

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$ *Grenzen einsetzen, Wert an unterer Grenze vom Wert an oberer Grenze abziehen*

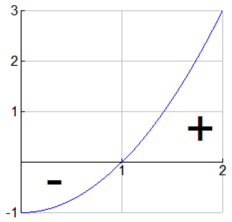
$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Flächenberechnungen–Tricks

Achtung: Für f(x) < 0 ist auch das Integral negativ. Für den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse muss dann der *Betrag* des Integrals genommen werden.
Wenn die Funktion im angegebenen Intervall ein oder mehrere **Nullstellen** hat, müssen wir daher die einzelnen Flächenstücke getrennt berechnen und ihre Beträge addieren.

Beispiel 1: mit gegebenen Grenzen und Nullstelle im Intervall
Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse zwischen den Grenzen a = 0 und b = 2 eingeschlossen wird?

Lösung:
Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle, wir müssen daher von 0 bis 1 und von 1 bis 2 getrennt integrieren und die Absolutbeträge addieren!



$$\int_0^1 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

Wenn die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnet werden soll (ohne dass ein Intervall angegeben ist), müssen wir zuerst die **Nullstellen** bestimmen - das sind dann die Integrationsgrenzen.

Beispiel 2: ohne Grenzen mit Nullstellenberechnung
Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ und der x-Achse begrenzt wird?

Lösung:
Nullstellen bestimmen: $-x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$$A = \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{4}$$

Die Fläche, die von ***zwei Kurven*** - den Graphen der Funktionen f(x) und g(x) - eingeschlossenen wird, berechnen wir nach der Formel

$$A = \int_{x1}^{x2} (f(x) - g(x))dx$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei die x-Koordinaten der Schnittpunkte. Wenn es mehr als zwei Schnittpunkte gibt, muss man wieder die einzelnen Flächenstücke getrennt verrechnen.

Beispiel 3: Fläche zwischen 2 Funktionen
Wie groß ist die Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$?

Lösung:
Schnittpunkte bestimmen: $x^2 = x^3 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 (x^3 - x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) - (0) = -\frac{1}{12}$$

Lernziele: Ich kann die Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse berechnen.
Ich kann die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen berechnen.

Übungen:

Berechnen Sie die Fläche folgender Funktionen im angegebenen Intervall [a; b], ohne Berechnung der Nullstellen (19−23) und mit Berücksichtigung von Nullstellen (24−28)

19) $f(x) = 3x$ [2, 5]	24) $f(x) = 2x+2$ [−2; 2]
20) $f(x) = 8x^3$ [0, 3]	25) $f(x) = x^2 - 5x$ [2; 6]
21) $f(x) = x^2 - x$ [−1, 0]	26) $f(x) = x^3 - 8$ [0; 3]
22) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$ [0, 3]	27) $f(x) = x/5 - 3$ [0; 20]
23) $f(x) = f(x) = x^2/3 + x/4$ [−2, 2]	28) $f(x) = -x^2 + 3x$ [0; 4]

Berechnen Sie die Fläche zwischen x−Achse und der Funktion (zuerst Nullstellen bestimmen!)	Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) (zuerst Schnittpunkte bestimmen!)
29) $f(x) = -x^2 + 5x$	36) $f(x) = x^2 + 4$ $g(x) = 2x^2 - 5$
30) $f(x) = x^2 + x - 6$	37) $f(x) = x^2$ $g(x) = -x + 6$
31) $f(x) = x^2 - 4$	38) $f(x) = x^2$ $g(x) = 4$
32) $f(x) = x^3 - 4x^2$	39) $f(x) = x^2 + 3x - 5$ $g(x) = 2x - 3$
33) $f(x) = x^3 - 9x$	40) $f(x) = x^2 - 30$ $g(x) = 3x - 12$
34) $f(x) = x^4 - x^2$	41) $f(x) = x^3 - 3$ $g(x) = x^2 + 5x$
35) $f(x) = x^3 - 7x + 6$	

Berechnen Sie das **Volumen** der folgenden Funktionen bei Rotation um die x-Achse im angegebenen Intervall mit Hilfe der Formel $V = \pi \cdot \int_{x1}^{x2} y^2 \cdot dx$.

Erstellen Sie auch eine Zeichnung der Funktion und bestimmen Sie den Körpertyp des Volumens

42) $f(x) = 2x$ x1 = 0 x2 = 4
43) $f(x) = 5$ x1 = 0 x2 = 10
44) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ x1 = -5 x2 = 5
45) $f(x) = x^2+4$ x1 = -3 x2 = 3
46) $f(x) = \sqrt{x}$ x1 = 0 x2 = 5
47) $f(x) = x/3$ x1 = 3 x2 = 7
48) $f(x) = \sqrt{25 - \frac{x^2}{180}}$ x1 = -30 x2 = 30

Lösungen:

19) 31,5	29) 20,833	36) 36	42) $256/3\ \pi \approx 268$ Kegel
20) 162	30) 20,833	37) 20,8333	43) $250\ \pi \approx 785$ Zylinder
21) 5/6	31) 10,666	38) 10,666..	44) $500/3\ \pi \approx 524$ Kugel
22) 48	32) 21,333	39) 4,5	45) $337{,}2\ \pi \approx 1059$ Atommeiler
23) 16/9	33) 40,5	40) 121,5	46) $12{,}5\ \pi \approx 39$ Paraboloid (Autoscheinwerfer)
24) 1 + 9	34) 0,2666	41) 21,333	47) $316/27\ \pi \approx 37$ Kegelstumpf
25) 13,5 + 2,833	35) 32,75		48) $1400\ \pi \approx 4398$ Fass (Ellipsoid)
26) 12 + 8,25			
27) 22,5 + 2,5			
28) 4,5 + 1,833			