Kosten- und Preistheorie

Auch die Kosten können einer Funktion genügen. Wir haben schon die **lineare Kostenfunktion** kennen gelernt: **y = kx+d,** wobei d die Fixkosten sind und k die variablen Kosten je Stück.
Bei der linearen Funktion sind die **Kosten je Stück** immer **konstant**, egal wie viel Stück man produziert. Das ist unrealistisch. Daher verwendet man auch quadratische und kubische Kostenfunktionen, bei denen es bei steigender Stückzahl zu einem **Absinken** der **Kosten pro Stück** kommt. Ab einer bestimmten Stückzahl kommt es aber wieder zu einem Kostenanstieg. Daher will man den optimalen Punkt (**Betriebsoptimum**) ermitteln, wo die Kosten pro Stück minimal werden (Extremwert bestimmen!)

Beispiel 1:
Eine quadratische Kostenfunktion für die Gesamtkosten der Produktion ist durch $K(x) = x^2+20x+200$ gegeben. Berechnen Sie das Betriebsoptimum (Stückzahl) beim Minimum der Stückkosten und das Minimum der Stückkosten (= langfristige Preisuntergrenze LPU).

Lösung:
Die Kostenfunktion ist $K(x) = x^2+20x+200$. Daraus folgt die Stückkostenfunktion: $\overline{K}(x) = x + 20 + \frac{200}{x}$, die das Minimum erreichen soll. Also ableiten und Null setzen:

$\overline{K}'(x) = 1 - \frac{200}{x^2} = 0$ $\quad | \cdot x^2$

$x^2 - 200 = 0$ $\quad | +200$

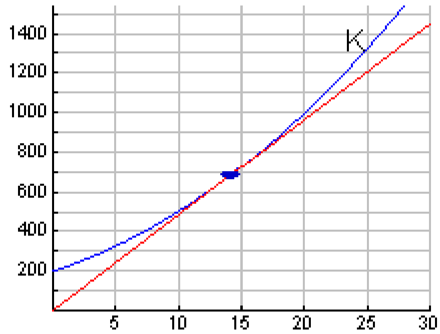
$x^2 = 200$ $\quad | +- \sqrt{\ }$

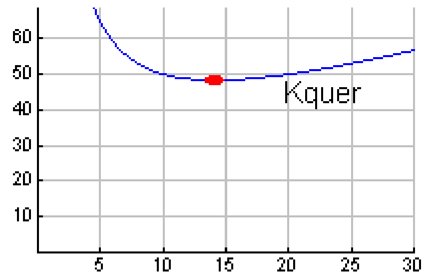
$x = +- \mathbf{14{,}142}$ $\quad \rightarrow$ $\mathbf{x_{opt} \approx 14\ ME}$

Eingesetzt in die Stückkostenfunktion ergibt

$\overline{K}(14{,}142) = 14{,}142 + 20 + \frac{200}{14{,}142} = 48{,}284$

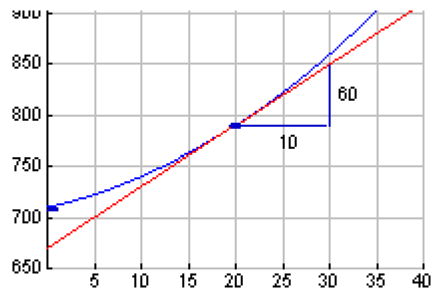
Die minimalen Stückkosten betragen ≈ **48 GE/ME = LPU**





Witzigerweise geht die Tangente durch den Ursprung an die Kostenfunktion genau durch das Betriebsoptimum, was man auch beweisen kann.

Beispiel 2:
Die Fixkosten einer Produktion betragen 710 GE. Die Kosten für 20 ME betragen 790 GE und der Kostenzuwachs pro Stück (K') ist 6 GE/ME bei 20 ME. Wie lautet die dazu passende quadratische Kostenfunktion?



Lösung:
Die Kostenfunktion lautet allgemein: $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
Die Fixkosten sind die Kosten bei Produktion Null, also ist $\rightarrow$ $\mathbf{c = 710}$
Weiters sind die Kosten bei 20 ME 790 GE: $K(20) = 790$ $\rightarrow$ $790 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 710$ (I)
Die Ableitung der Kostenfunktion liefert die Grenzkosten-Zuwachskostenfunktion: $K'(x) = 2a \cdot x + b$
Dafür gilt also: $K'(20) = 6$ $\rightarrow$ $6 = 2a \cdot 20 + b$ (II)
Also haben wir das Gleichungssystem: (I) $400a + 20b = 80$
(II) $40a + b = 6$ $\quad |\cdot(-20)$

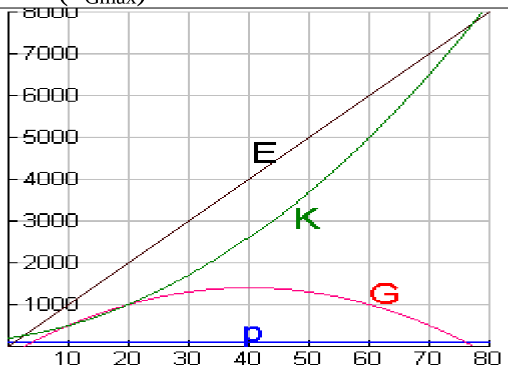
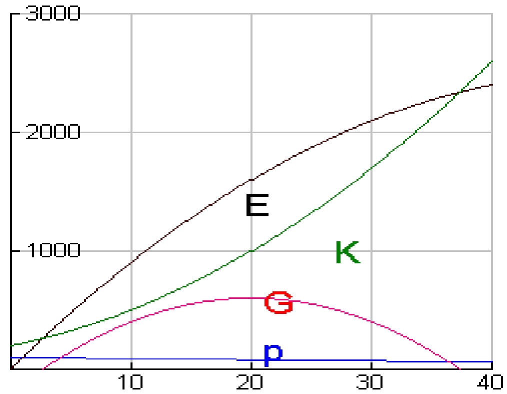
und die Lösung ergibt: (I) $400a + 20b = 80$
$\underline{\text{(II)}\ -800a - 20b = -120}$
$-400a = -40$ $\rightarrow$ $\mathbf{a = 1/10 = 0{,}1}$

und nach Einsetzung: $400 \cdot 0{,}1 + 20b = 80 \rightarrow 20b = 40 \rightarrow$ **$b=2$**

Das ergibt als Kostenfunktion: **$K(x) = 0{,}1\,x^2 + 2x + 710$**

2. Preistheorie:

Im Folgenden gilt die Kostenfunktion $K(x) = x^2+20x+200$

Die Waren werden zu einem **Marktpreis** verkauft, der entweder **fix** sein kann (wenn viele Anbieter am Markt sind – wie bei Lebensmitteln – atomistische Situation). Das ergibt die folgende Preisfunktion: **$p(x) = 100$**	oder der bei steigendem Angebot sinkt (wie bei den elektronischen Geräten bei Monopolisten oder Fastmonopolisten) Das ergibt die folgende Preisfunktion: **$p(x) = 100-x$**
Daraus ergibt sich der Reinerlös (Umsatz) als Produkt aus Preis p und verkauft Stückzahl x: $E(x) = p(x) \cdot x = 100x$	$E(x) = p(x) \cdot x = 100x - x^2$
Hieraus ergibt sich der Gewinn, wenn man Erlös minus Kosten rechnet: $G(x) = E(x) - K(x) = 100x - (x^2+20x+200)$ **$G(x) = -x^2 + 80x - 200$**	$G(x) = E(x) - K(x) = 100x - x^2 - (x^2+20x+200)$ **$G(x) = -2x^2 + 80x - 200$**
Nun stellt sich die Frage nach dem maximalen Gewinn, also werden wir wieder ableiten und Null setzen: $G'(x) = -2x + 80$ $0 = -2x + 80$ $2x = 80$ **$x_{Gmax} = 40$** eingesetzt in die Gewinnfunktion ergibt den maximalen Gewinn: $Gmax = G(x_{Gmax}) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 200 = 1400$	$G'(x) = -4x + 80$ $0 = -4x + 80$ $4x = 80$ **$x_{Gmax} = 20$** $Gmax = G(x_{Gmax}) = -2 \cdot 20^2 + 80 \cdot 20 - 200 = 600$
 Es interessieren aber auch der **Gewinnbereich** mit Break-Even-Point **BEP** (Beginn des Gewinns) und **Gewinngrenze** (Ende des Gewinns) – hier muss man die Gewinnfunktion Null setzen: $G(x) = 0$: $-x^2 + 80x - 200 = 0 \rightarrow x^2 - 80x + 200 = 0$ $x_{1,2} = 40 \pm \sqrt{1600 - 200}$ $x_1 = 2{,}58 \qquad x_2 = 77{,}4$ **Gewinnzone: $3 < x < 77$**	 $G(x) = 0$ $-2x^2 + 80x - 200 = 0 \rightarrow x^2 - 40x + 100 = 0$ $x_{1,2} = 20 \pm \sqrt{400 - 100}$ $x_1 = 2{,}68 \qquad x_2 = 37{,}3$ **Gewinnzone: $3 < x < 37$**
Die Werte für x_{Gmax} und p setzt man zum optimalen Arbeitspunkt für die Firma zusammen und nennt ihn „**Cournot'scher Punkt**": **C.P.(x_{Gmax} | p) = (40|100)**	Schließlich will man noch wissen, welchen Marktpreis man beim maximalen Gewinn erzielt, also setzt man den x_{Gmax} in die Preisfunktion ein: $p(x_{Gmax}) = p(20) = 100-20 =$ **80** **C.P.(x_{Gmax} | p) = (20|80)**

Übungen:

1) Berechnen Sie für folgende Kostenfunktionen das **Betriebsoptimum** und das **Minimum der Stückkosten**. Zu welchem **Marktpreis** wird der Betrieb langfristig funktionieren?

a) $K(x) = x^2/20 + 6x + 230$ b) $K(x) = x^2/1000 + x/5 + 80$

c) $K(x) = x^2/100 + 7x/5 + 7049$ d) $K(x) = x^2/100 + 14x + 6900$

2) Berechnen Sie die **quadratische Kostenfunktion**, wenn gegeben ist:

a) Die Fixkosten betragen 5100 GE, die Gesamtkosten betragen bei 100 ME 6600 GE. Bei 20 ME betragen Sie 5384 GE.

b) Die Fixkosten betragen 1080 GE, bei 400 ME sind die Gesamtkosten 25080 GE. Dort ist der Kostenanstieg 100 GE/ME

c) Die Fixkosten liegen bei 1000 GE, das Betriebsoptimum liegt bei x= 100 ME, die Gesamtkosten bei 100 ME betragen 220 GE

d) Bei 10 ME betragen die Gesamtkosten 860 GE, bei 20 ME betragen sie 940 GE, bei 30 ME betragen sie 1040 GE.

3) Berechnen Sie das **Gewinnmaximum** und den dazugehörigen **x-Wert**, die **Gewinngrenzen** und den **Cournot'schen Punkt** für folgende Angaben:

a) $K(x) = x^2/20 + 6x + 230$ $p = 20$ b) $K(x) = x^2/1000 + x/5 + 80$ $p(x) = 3 - x/100$

c) $K(x) = x^2/100 + 7x/5 + 7049$ $p=20$ d) $K(x) = x^2/100 + 14x + 6900$ $p(x) = 100 - x/100$

Lösungen:

1)

	x_{opt}	**LPU =** $\overline{K}(x_{opt})$
a)	67,8	12,78
b)	282,8	0,765
c)	839,58	18,19
d)	830,66	30,61

2) a) $1/100x^2+14x+5100$

2) b) $1/10x^2+20x+1080$

2) c) $1/10x^2-17,8x+1000$

2) d) $1/10x^2+5x+800$

3)

	untere Gewinngrenze (BEP) in GE	obere Gewinngrenze in GE	x_{Gmax} in ME	$G_{max} = G(x_{Gmax})$ in GE	$p(x_{Gmax})$ in GE/ME
a)	18	262	140	750	20
b)	33	221	127,27	98,18	1,73
c)	530	1330	930	1600	20
d)	82	4218	2150	85550	78,5