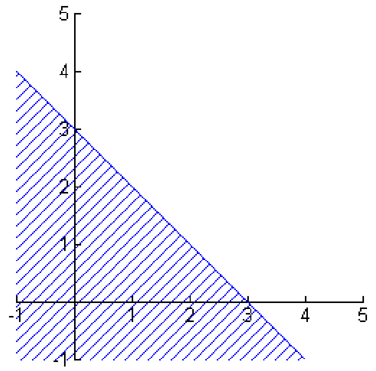
Ungleichungen mit 2 Variablen

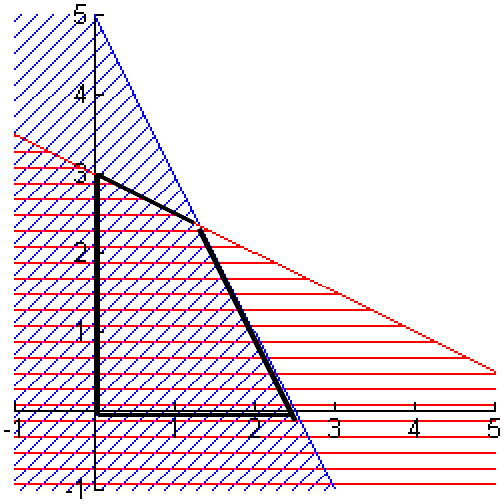
Was bedeutet **$y \leq -x+3$** ?
Die **Gleichung** bedeutet eine gerade Linie, die **Ungleichung** bedeutet alles darüber (>) oder darunter (<), also eine **Halbebene**



System von Ungleichungen:

Beispiel:
Lösen Sie das System von Ungleichungen durch eine Zeichnung des entsprechenden Gebietes:
I) $y \leq -2x+5$
II) $y \leq -1/2x+3$
III) $x,y \geq 0$

Lösung:



Lineare Optimierung:

Beispiel:
Eine Jugendgruppe beschließt, Zelte einzukaufen. In einem Sonderangebot werden zwei verschiedene Sorten von Zelten für jeweils 10 und 15 Personen preiswert angeboten. Von den 10-Personenzelten sind noch 5 und von den 15-Personenzelten nur noch 4 vorrätig. Die Zelte für 10 Personen kosten 200 Euro je Stück und diejenigen für 15 Personen insgesamt 400 Euro je Stück. Die Jugendgruppe kann insgesamt höchstens 1800 Euro für die Zelte ausgeben. Wie viele 10- und 15-Personenzelte kann die Jugendgruppe kaufen, damit eine möglichst große Anzahl von Jugendlichen in den Zelten untergebracht werden kann?

Lösung:

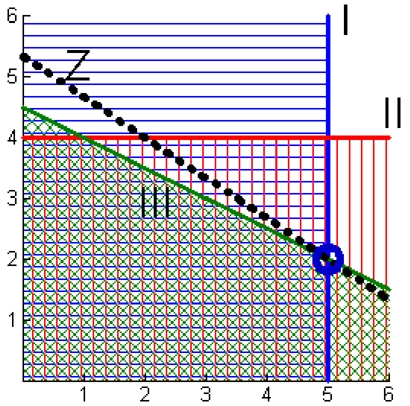
Zuerst sortieren wir die einzelnen Angaben und machen dann Ungleichungen daraus:

- Es sollen x Stück 10−Personenzelte gekauft werden, es gibt maximal 5 davon ➔ $x \leq 5$
- Es sollen y Stück 15−Personenzelte gekauft werden, es gibt maximal 4 davon ➔ $y \leq 4$
- Gesamtkosten: x Zelte mal 200€ und y Zelte mal 400€ und maximal 1800€ ➔ $200x + 400y \leq 1800$
- Anzahl der Personen: x Zelte mal 10 Personen und y Zelte mal 15 Personen soll maximiert werden:
  ⇨ $10x + 15\,y$ ➔ Maximum

Das ergibt folgende Ungleichungen:
(I) $\mathbf{x \leq 5}$
(II) $\mathbf{y \leq 4}$
(III) $200x + 400y \leq 1800$ ➔ umgeformt auf y: $\mathbf{y \leq 4{,}5 - 0{,}5x}$
Zielfunktion: Anzahl der SchülerInnen soll maximal werden**:** $\mathbf{Z = 10x + 15y}$
⇨ umgeformt auf y ergibt sich: $y = Z/15 - 10/15\,x$

grafische Lösung:

Zuerst die 3 Ungleichungen einzeichnen
(I) Senkrechte bei x=5 und nach links schraffiert
(II) Waagrechte bei y= 4 und nach unten schrafiert
(III) Gerade angefangen bei Y=4,5 auf der y−Achse mit Steigung −0,5
(IV) Zielfunktion mit zuerst z.B. Z=30 zeichnen ($y = 2 - 2/3 \cdot x$) und dann die Zielfunktion bis zum weitest entfernten Punkt des Gebietes parallel verschieben (bei x=5 und y= ungefähr 2)



rechnerische Bestimmung des Schnittpunkts :

Schnitt von I und III:
$x = \mathbf{5}$
$y = (1800 - 200x)/400 = (1800 - 200 \cdot 5)/400 = \mathbf{2}$

Zielfunktion im Schnittpunkt:
$Z = 10 \cdot \mathbf{5} + 15 \cdot \mathbf{2} = 50 + 30 = 80$

Ergebnis: Es können 80 Personen in den Zelten übernachten wenn 5 Stück 10−Pesonenzelte und 2 Stück 15−Peronenzelte gekauft werden (um 1800 €)

Übungen:

1. Stelle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungssysteme graphisch dar:
   a) $x \geq 0, y \geq 0, \quad 4x + 3y \leq 12$
   b) $x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad 2x + y \leq 8$
   c) $x \geq 0, y \geq 0, \quad 2x + y \leq 8, \quad x + 3y \leq 9$
   d) $0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad 2x + 3y \leq 16$
   e) $x \geq 1, \quad 2y \geq x, \quad 2x + 3y \geq 14$
   f) $0 \leq x \leq 3, \quad 3y \leq x, \quad x + y \geq 8$
2. Eine Getränkefirma erzeugt durch Zusammenmischen von Apfelsaft und Birnensaft die Getränke „Apfelgold“ und „Birnengold“. „Apfelgold“ soll zu 3/4 aus Apfelsaft, „Birnengold“ zu 2/3 aus Birnensaft bestehen. Es stehen 2.000 l Birnensaft und 3.000 l Apfelsaft zur Verfügung. „Apfelgold“ bringt beim Verkauf doppelt so viel Gewinn wie „Birnengold“. Wieviel Liter muss man von jedem Getränk herstellen, damit ein möglichst hoher Gewinn entsteht?

3. Frau Steinkellner verkauft selbstgemachte Marmelade. Für ein Glas "Gartenglück" braucht sie 400 g Erdbeeren und 200 g Himbeeren, für ein Glas "Waldeslust" 100 g Erdbeeren, 200 g Himbeeren und 300 g Heidelbeeren. Insgesamt hat sie 18 kg Erdbeeren, 12 kg Himbeeren und 12 kg Heidelbeeren geerntet. Sie verkauft beide Sorten zum gleichen Preis. Wieviel muss sie von jeder Sorte kochen, um möglichst viel einzunehmen?
4. Eine Teehändlerin bietet zwei Teemischungen an. Mischung A besteht zu ¾ aus der Sorte Darjeeling und zu ¼ aus der Sorte Assam, Mischung B besteht je zur Hälfte aus Darjeeling und Assam. Insgesamt hat sie 150 kg Darjeeling und 100 kg Assam zur Verfügung. Der Reingewinn beträgt bei Mischung A 20,- €, bei Mischung B 10,- € pro kg.

   a. Wieviel soll sie von jeder Sorte anbieten, um ihren Gewinn zu maximieren?
   b. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn von Mischung A höchstens 150 kg abgesetzt werden können?

5. Eine Bäckerei bietet zwei Sorten Vollkornbrot an: Schwarzbrot und Mischbrot, wobei vom Mischbrot höchstens 4mal so viel wie vom Schwarzbrot hergestellt werden soll. Für einen Wecken Schwarzbrot benötigt man 200 g Dinkel- und 400 g Roggenmehl, für einen Wecken Mischbrot je 300 g Dinkel- und Roggenmehl. Insgesamt stehen 210 kg Dinkelmehl und 300 kg Roggenmehl zur Verfügung.

   a. Wieviel Brot von jeder Sorte muss gebacken werden, wenn die Gesamtmenge möglichst groß sein soll?
   b. Ein Wecken Schwarzbrot kostet 2,- €, ein Wecken Mischbrot 4,- €. Bei welcher Menge werden die Einnahmen maximal?

6. Ein Hundezüchter hat zwei verschiedene Futtermischungen zur Auswahl. Eine Portion (100 g) von Mischung A enthält 60 g Eiweiß, 30 g Kohlenhydrate und 10 g Fett. Eine Portion von Mischung B enthält 20 g Eiweiß, 60 g Kohlenhydrate und 10 g Fett. Der Tagesbedarf eines Welpen beträgt mindestens 240 g Eiweiß, 300 g Kohlenhydrate und 80 g Fett. Eine Portion von Mischung A kostet 0,50 €, von Mischung B 0,20 €. In welchem Verhältnis muss der Züchter das Futter zusammenstellen, damit die Gesamtkosten möglichst niedrig werden?
7. Herr Prohaska will auf eine Wanderung Vollkornbrot und Dauerwurst mitnehmen. Er möchte mindestens 300 g Kohlenhydrate, mindestens 80 g Eiweiß und mindestens 30 g, aber höchstens 90 g Fett zu sich nehmen. 100 g Brot enthalten 50 g Kohlenhydrate, 8 g Eiweiß und 2 g Fett; 100 g Wurst enthalten 20 g Eiweiß und 30 g Fett.

   a. Wieviel Brot und Wurst muss Herr Prohaska mitnehmen, wenn das Gesamtgewicht der Lebensmittel möglichst niedrig sein soll?
   b. 1 kg Vollkornbrot kostet 3,- €, 1 kg Dauerwurst 15,- €. Wie muss Herr Prohaska seinen Proviant zusammenstellen, wenn er möglichst wenig ausgeben will?

8) Biogas ist ein alternativer Energieträger. Es kann unter anderem aus Mais-oder Zuckerrüben gewonnen werden. Der Hauptbestandteil von Biogas ist Methan.

x... Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Mais angebaut wird

y... Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Zuckerrüben angebaut werden

a) Eine Landwirtin hat insgesamt höchstens 40 Hektar (ha) Anbaufläche zur Verfügung. Sie will auf einer Ackerfläche von mindestens 5 ha Mais und auf einer Ackerfläche von mindestens 10 ha Zuckerrüben anbauen. Außerdem möchte sie einen Ertrag von mindestens 480000 m³ Biogas erzielen. Sie möchte die Kosten für die Erzeugung von Methan möglichst gering halten. In der folgenden Tabelle sind die Kosten und Erträge aufgelistet:

	Produktionskosten für Methan in €/m^3	Methanertrag in m^3/ha	Biogasertrag in m^3/ha
Energiemais	0,2	6 400	11 000
Zuckerrüben	0,25	7 000	12 600

- Stellen Sie die notwendigen Ungleichungen und die Zielfunktion für eine lineare Optimierung auf.

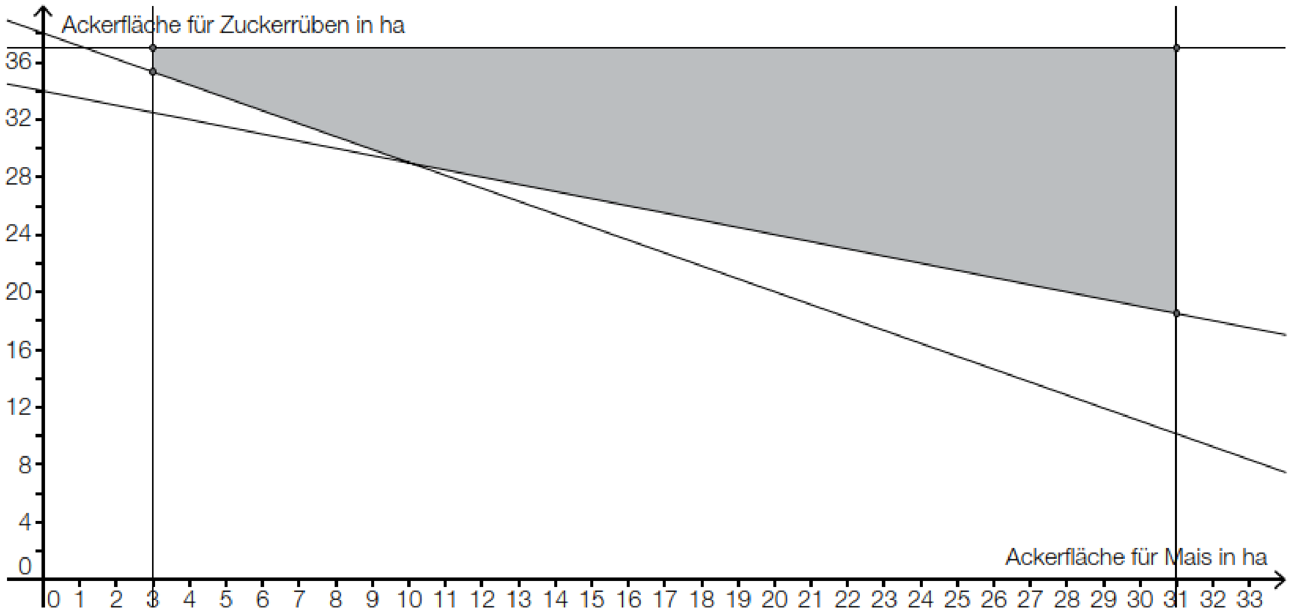
b) Ein Landwirt ermittelt für seine Biogasproduktion folgende Zielfunktion Z der entstehenden Kosten in Euro (€):

$Z(x,y) = 1\,050 \cdot x + 1\,500 \cdot y$

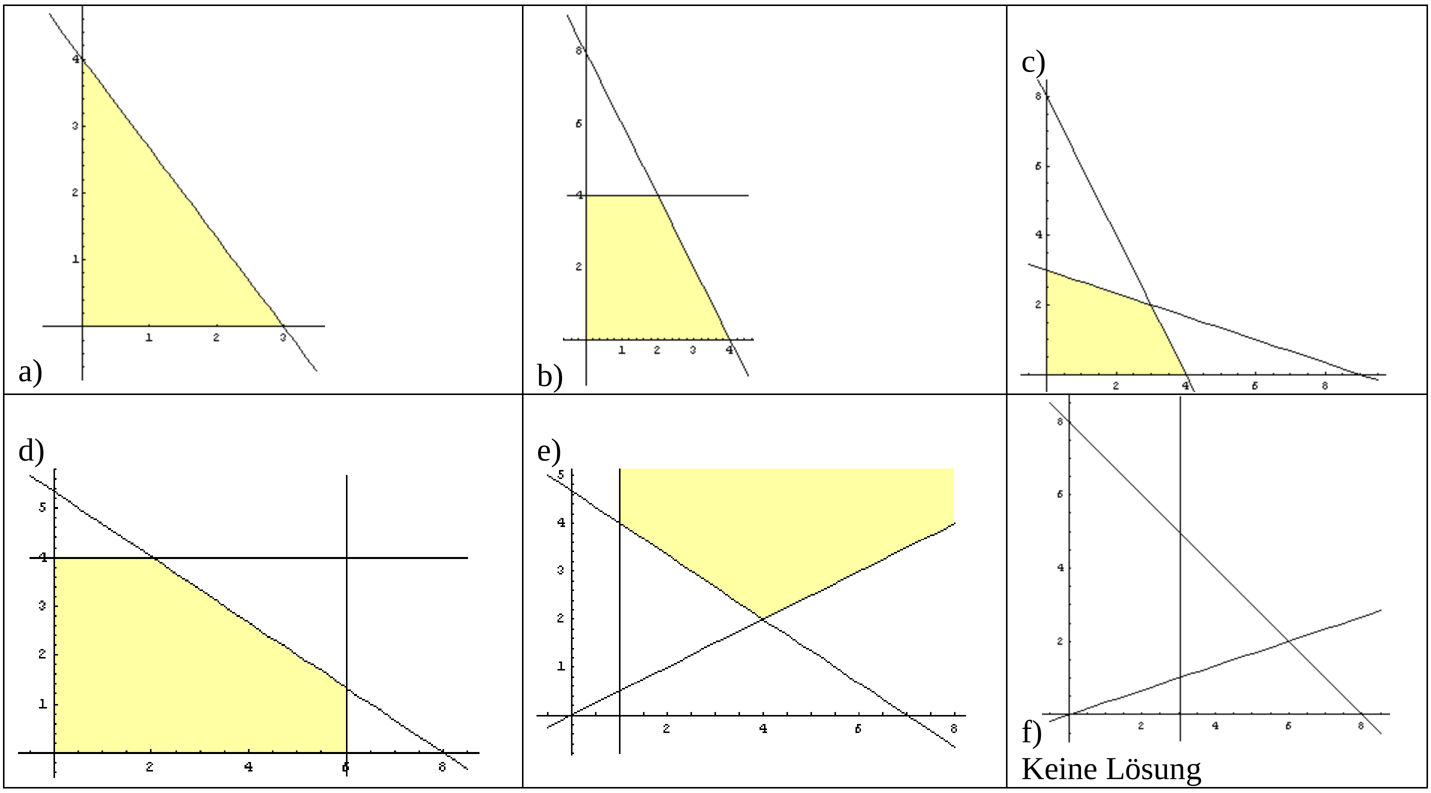
– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik mit dem grau unterlegten Lösungsbereich ein.

– Lesen Sie aus der Grafik diejenigen Ackerflächen für Mais und Zuckerrüben ab, für die die Kosten minimal werden.

– Berechnen Sie die entstehenden minimalen Kosten.



Lösungen: 1)



2) 3200 l Apfelgold und 1800 l Birnengold

3) jede Kombination mit x + y = 60, 20 ≤ x ≤ 40 ist möglich

4) a) A: 200 kg, B: 0 kg b) A: 150 kg, B: 75 kg

5) a) 450 kg Schwarzbrot, 400 kg Mischbrot b) 150 kg Schwarzbrot, 600 kg Mischbrot

6) A: 2 Portionen, B: 6 Portionen

7) a) 600g Brot, 160g Wurst b) 900g Brot, 40g Wurst

8) a) Zielfunktion: $Z(x,y) = 0{,}2 \cdot 6\,400 \cdot x + 0{,}25 \cdot 7\,000 \cdot y = 1\,280 \cdot x + 1\,750 \cdot y$

Ungleichungen:

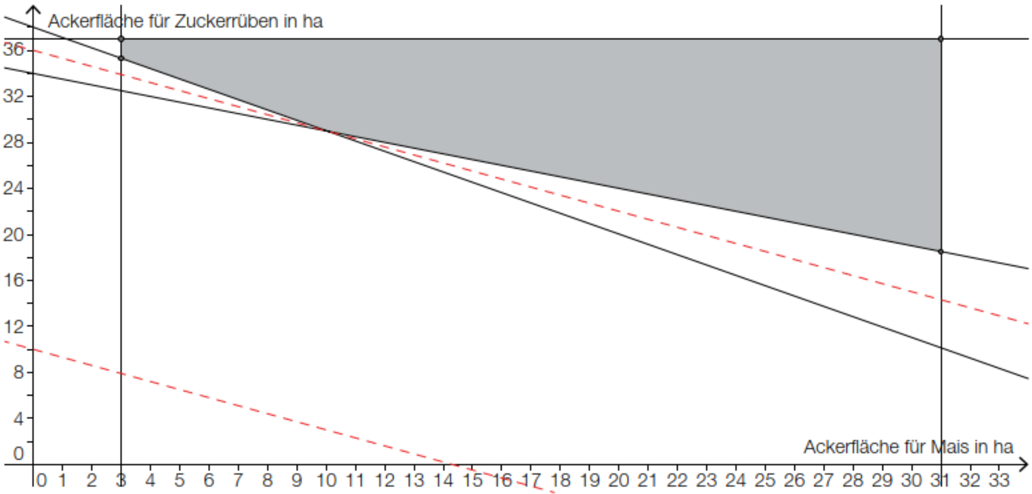
$x \geq 5$

$y \geq 10$

$x + y \leq 40$

$11\,000 \cdot x + 12\,600 \cdot y \geq 480\,000$

b)



Der Lösungspunkt hat die Koordinaten (10|29).
Es werden auf einer Ackerfläche von 10 ha Mais und auf einer Ackerfläche von 29 ha Zuckerrüben angepflanzt. ⇒ $Z(10, 29) = 1\,050 \cdot 10 + 1\,500 \cdot 29 = 54\,000$
Die minimalen Kosten betragen daher € 54.000.