Was ist der Differentialquotient in der Physik ?

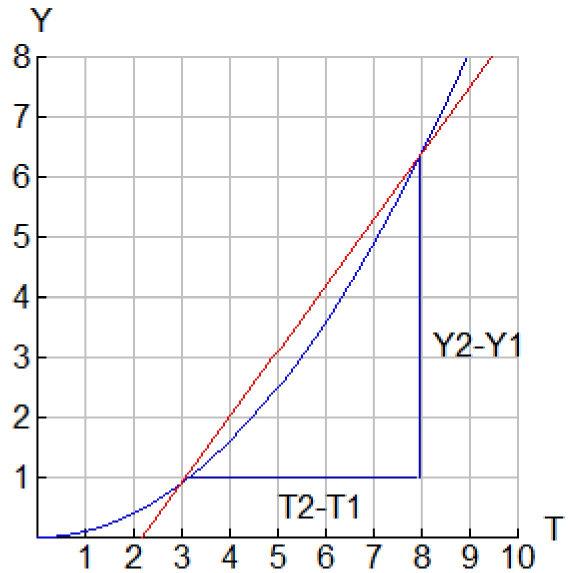
Ein Auto fährt auf der A1 von Wien nach Salzburg. Wir können diese Fahrt durch eine Funktion Y(T) beschreiben, die zu jedem Zeitpunkt T (Stunden oder Sekunden) die Entfernung Y(T) (in Kilometer oder Meter) von Wien angibt.
Wie groß ist die **mittlere Geschwindigkeit** des Fahrzeugs zwischen zwei Zeitpunkten T1 und T2 ?

LÖSUNG:

mittlere Geschwindigkeit = $\frac{\textit{gefahrene Strecke}}{\textit{benötigte Zeit}}$ oder $\boxed{V_m = \frac{Y2-Y1}{T2-T1} = \frac{Weggdifferenz}{Zeitdifferenz}}$

Dieser Ausdruck heißt **Differenzenquotient**.

Graphische Darstellung des Differenzenquotienten:



Wie groß ist die ***momentane Geschwindigkeit*** des Autos zum Zeitpunkt T1 ?

LÖSUNG:
Wir können die mittlere Geschwindigkeit des Autos zwischen den Zeitpunkten T1 und T2 für ein möglichst kleines $\Delta T = T2-T1$ berechnen. Je kleiner dieses Δt ist desto eher wird der Differenzenquotient mit der Momentangeschwindigkeit übereinstimmen.

DEFINITION

Die **Momentangeschwindigkeit** ergibt sich aus dem Grenzwert (Limes) des Differenzenquotienten und heißt **Differenzialquotient**:

$$\boxed{Y'(T) = V(T) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Y2-Y1}{T2-T1}}$$

Damit können wir nun folgendes festhalten:

Wenn in der Physik eine **Wegfunktion s(t)** eines bewegten Körpers (Auto, Kugel,…) gegeben ist, so kann man daraus die **Momentangeschwindigkeit v(t)** durch differenzieren berechnen: $\boxed{v(t) = y'(t)}$.

Außerdem kann man die (Momentan–)**Beschleunigung** durch nochmaliges Differenzieren bekommen: $\boxed{a(t) = y''(t) = v'(t)}$.

Dazu die **Einheiten**:

- y(t) wird meist in Meter (oder km)
- v(t) wird meist in Meter pro Sekunde (oder km/h)
- a(t) wird meist in Meter pro Sekundenquadrat (oder km/h Zunahme pro Sekunde) angegeben

Beispiel:
Der freie Fall eines Körpers ohne Berücksichtigung der Luftreibung kann durch die folgende Wegfunktion beschrieben werden: $y(t) = g/2 * t^2$ (mit g = 9,81 m/s² ≈10 m/s²)
Berechnen Sie damit die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung durch Differenzieren.
Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit nach 3 Sekunden? Wie tief ist der Gegenstand dann gefallen?

Lösung:
Durch Differenzieren erhält man:
y'(t) = **v(t) =** g/2* 2t = **g*t** (≈ 10t)
y''(t) = **a(t) = g** (≈10)
Nach 3 Sekunden ist
y(3) = g/2*3² ≈ 5*9 = **45 m Falltiefe**
v(t) = g*3 ≈ 30 m/s
(mit 3,6 multipliziert ergibt das **108 km/h Geschwindigkeit** !)

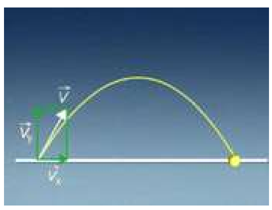
Aber dieses Gesetz des Herleitens der Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Differenzieren gilt nicht nur für eindimensionale Bewegungen, es geht auch **zweidimensional** (Würfe und Drehbewegungen):

Die Wegfunktion wird dann ein **Vektor** $\vec{s}$, ebenso Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{s'(t)} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{s''(t)} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel:
Den **schiefen Wurf ohne Luftreibung** beschreibt folgende Funktion

$$\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0X} * t \\ v_{0Y} * t - \frac{g}{2} * t^2 \end{pmatrix}$$ wobei noch gilt: $$\begin{cases} v_{0X} = v_o * \cos\alpha \\ v_{0Y} = v_o * \sin\alpha \end{cases}$$



Wie groß ist die Wurfhöhe und Wurfweite bei
α=30° und v_0 = 20 m/s ?

Lösung:
Die Bewegung in waagrechter x–Richtung ist eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. In senkrechter y–Richtung ist es eine Kombination aus konstanter Geschwindigkeit nach oben und Beschleunigung nach unten.

Wenn y(t) = 0 ist, ist das Ende des schiefen Wurfes erreicht, also gilt:
$v_{0Y} \cdot t - g/2 \cdot t^2 = 0$ ➔ $t \cdot (v_{0Y} - g/2 \cdot t) = 0$ ➔ t=0 oder $t = 2 \cdot v_{0Y}/g$
mit $v_{0Y} = 20$ und $\alpha = 30°$ ergibt das $t \approx 2 \cdot (20 \cdot \sin 30°)/10$ = **2 sec**
und damit kann man die **Wurfweite** berechnen:

$x(2) = v_{0X} \cdot t = 20 \cdot \cos 30° \cdot 2 \approx$ **34,6 m**

Für die **Wurfhöhe** müssen wir das Maximum von y(t) berechnen, also differenzieren und Null setzen:

$$y'(t) = v_{0Y} - \frac{g}{2} * 2t \;\Rightarrow\; t = \frac{v_{0Y}}{g} = \frac{10}{10} = 1$$

➔ nun können wir in y(t) einsetzen und die **Wurfhöhe** ablesen :

$$y(t) = v_{0Y} * t - \frac{g}{2} * t^2 = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = \mathbf{5\ m}$$

LINKS zum schiefen Wurf:
http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/9/wurf/physl_schiefer_wurf.htm
http://www.mathezentrale.de/beitrag4/wurf1.htm
http://www.ammu.at/archiv/18/18_321.htm
http://www2.lehrer-online.de/physik/kinematik/kinematik/a00.html

Beispiel :
Für die **Kreisbewegung** gilt folgende Weg–Funktion

$$\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \cos \omega t \\ r * \sin \omega t \end{pmatrix}$$ wobei r der Radius des Kreises

ist und ω die Winkelgeschwindigkeit ($\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$)

mit f = Anzahl der Drehbewegungen pro Sekunde und T= Zeit für eine Umdrehung

Für ein **Praterkarussell** (Roundup) gilt: r = 3m und ω= 2 rad/sec. Wie groß ist die Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung. Reicht die Drehbeschleunigung im oberen Drehpunkt des Karussells als Gegenbeschleunigung gegen die Erdbeschleunigung g ≈10 m/s²

Lösung:
Die Ableitungen der Wegfunktion sind:

$$\overrightarrow{s'(t)} = \overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r * \omega * \sin \omega t \\ r * \omega * \cos \omega t \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{s''(t)} = \overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r * \omega^2 * \cos \omega t \\ -r * \omega^2 * \sin \omega t \end{pmatrix}$$

mit den Zahlen für das Karussells ergibt das:

$$\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} -3 * 2 * \sin 0{,}5t \\ 3 * 2 * \cos 0{,}5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 * \sin 0{,}5t \\ 6 * \cos 0{,}5t \end{pmatrix}$$ der Betrag davon ist **v = 6 m/s**

$$\overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix} -3 * 2^2 * \cos 0{,}5t \\ -3 * 2^2 * \sin 0{,}5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 * \cos 0{,}5t \\ -12 * \sin 0{,}5t \end{pmatrix}$$ der Betrag davon ist **a = 12 m/s²**

daher ist die Kompensation der Erdbeschleunigung im oberen Umkehrpunkt gegeben und die Leute fallen nicht aus ihren Sitzen!

Übungen:

1) Für ein Auto mit Beschleunigung a = 3 m/s² ist die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden zu berechnen und der Weg, der bis dahin zurückgelegt wurde, wenn mit der Wegformel $s(t) = a/2*t^2$ gerechnet wird.

2) Für einen Zug gilt die Beschleunigung a= 0,5 m/s². Berechnen Sie die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden und den bis dahin zurückgelegten Weg, wenn mit der Wegformel $s(t) = a/2*t^2$ gerechnet wird.

3) Peter läuft beim Sprint mit Beschleunigung a =2 m/s² los. Wie lange dauert es, bis er damit seine Höchstgeschwindigkeit von 8 m/s erreicht? Welchen Weg hat er dann zurückgelegt ? Wenn er dann mit 8 m/s weiterläuft – wie viel Zeit braucht er für 100 m ? ($s(t) = a/2*t^2$)

4) Beim **Bremsen** wird genau so gerechnet wie beim Beschleunigen. Nur umgekehrt. Die Wegfunktion kann man wieder verwenden: $s(t) = a/2*t^2$. Die Geschwindigkeitsfunktion auch: $v(t) = a*t$.

a) Man zeige, dass durch Elimination des Zeitparameters t beide Formeln zu einer neuen Formel zusammengefasst werden können: $v^2 = 2a*s$
b) Damit berechne man den Bremsweg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 72 km/h (= ? m/s), wenn man weiß, dass die Bremsverzögerung 6 m/s² beträgt
c) Aus den Bremsspuren eines Autounfalls kann man einen Bremsweg von 40 m erkennen. Welche Anfangsgeschwindigkeit hatte der Autolenker bei einer Bremsverzögerung von 6 m/s²?

5) Beim **senkrechten Wurf** gilt $s(t) = y(t) = v_0*t - g/2*t^2$. Jemand schießt mit v_0 = 15 m/s einen Ball ab. Welche maximale Wurfhöhe erreicht er? Wie lange dauert es bis der Ball wieder unten ankommt?

6) Der **schiefen Wurf:** Zeigen Sie, dass man aus der Formel für den schiefen Wurf: $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0X} * t \\ v_{0Y} * t - \frac{g}{2} * t^2 \end{pmatrix}$ durch Elimination der Zeit t die Formel

$y = \frac{v_{0Y} * x}{v_{0X}} - \frac{g * x^2}{2 * v_{0X}^2}$ entsteht. Leiten Sie diese Formel nach x ab und bestimmen sie damit das Maximum der Wurfbahn (und damit die **Wurfhöhe**) und die **Wurfweite** für die Annahme: $v_{0X} = v_{0Y}$ = 15 m/s und g=10 m/s²

7) Zeigen Sie, dass aus der Formel für den schiefen Wurf: $y = \frac{v_{0Y} * x}{v_{0X}} - \frac{g * x^2}{2 * v_{0X}^2}$

durch Ableiten und Nullsetzen die Gleichung $x = \frac{v_{0X} * v_{0Y}}{g}$ für das Maximum

entsteht und berechnen Sie daraus allgemein die Wurfhöhe ($y = \frac{v_{0Y}}{2g}$).

Bei welchem Wert von α ist die Wurfhöhe am größten ($v_{0Y} = v_0 * \sin \alpha$)?

8) Um die **Wurfweite** allgemein bestimmen zu können, kann man aus der Formel für den schiefen Wurf: y = $\frac{v_{0Y} * x}{v_{0X}} - \frac{g * x^2}{2 * v_{0X}^{\ 2}}$ durch Einsetzen von

$v_{0Y} = v_0 * \sin\alpha$ und $v_{0X} = v_0 * \cos\alpha$ und Nullsetzen die Formel
$x = 2 * \sin\alpha * \cos\alpha * v^2/g = v^2/g * \sin 2\alpha$ gewinnen.
Zeigen Sie durch Differenzieren und Nullsetzen, dass bei 45° das Maximum dieser Funktion erreicht wird.

9) Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α schräg nach oben geworfen. Die Wurfbahn kann durch die Gleichungen

$$x = v_0 \cos(\alpha)\cdot t$$
$$y = v_0 \sin(\alpha)\cdot t - g/2\cdot t^2$$

beschrieben werden (g: Erdbeschleunigung; der Luftwiderstand wird dabei vernachlässigt).
Rechnen Sie mit den Werten

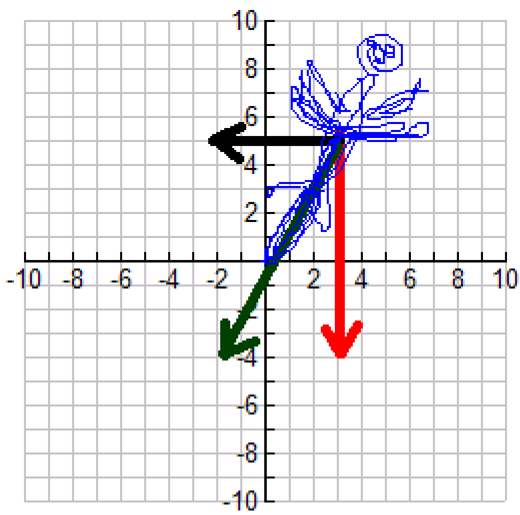
v_0 = 50 m/s, α = 36,87° (cos(α)= 4/5, sin(α)= 3/5), g = 10 m/s².

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Wurfbahn durch Elimination von t, berechnen Sie die Wurfweite und die Koordinaten des höchsten Bahnpunktes.
b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Gleichung der Wurfparabel lautet:
$y = \tan(\alpha)\cdot x - g\cdot x^2/(2v_0^2\cos^2(\alpha))$

10) Ein Auto beschleunige mit abnehmender Beschleunigung, so dass die Geschwindigkeitsfunktion angenähert werden kann mit $v(t) = 50*(1-e^{-0,04t})$
Berechnen sie damit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nach 0, 20, 100 und 200 Sekunden. Machen Sie damit ein Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm! Wird das Geschwindigkeitsmaximum in endlicher Zeit erreicht und wie groß ist es ?

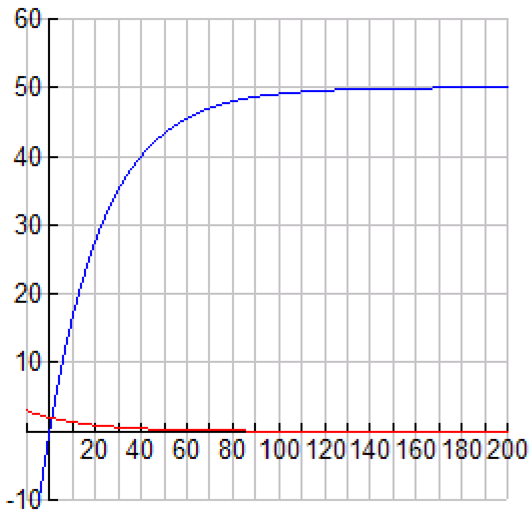
11) Für die Kreisbewegung gilt die Formel $\overrightarrow{s(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \cos\omega t \\ r * \sin\omega t \end{pmatrix}$

a) *) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit dem Betrag nach v=r*ω ist und dass der Geschwindigkeitsvektor auf den Wegvektor, der vom Mittelpunkt zum Körper zeigt, normal steht (skalares Produkt muss Null sein!).
b) *) Zeigen Sie, dass die Beschleunigung dem Betrag nach a = r*ω² ist und dass sie in die entgegengesetzte Richtung wie der Wegvektor zeigt, also zentripetal ins Zentrum der Drehbewegung.
c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit eines Radfahrers, der eine Kurve mit dem Radius r = 3m fährt und diesen Kreis in 6 Sekunden durchfährt (ω=2π/T ≈1).
d) Wie groß ist die Zentrifugalbeschleunigung, die durch diese Kreisfahrt verursacht wird?
e) Wie schief muss der Radfahrer dann fahren, wenn er diese Beschleunigung ausgleichen will?



Lösungen:

1) $s = 150m$ $v = 30\ m/s = 108\ km/h$
2) $s = 25\ m$ $v = 5\ m/s = 18\ km/h$
3) $s = 16\ m$ $t = 4+10{,}5\ sec = 14{,}5\ sec$
4) $s = 33{,}3\ m$ $v = 21{,}9\ m/s \approx 79\ km/h$
5) $s = 11{,}25\ m$ $t = 2*1{,}5\ sec = 3sec$
6) $y = 11{,}25\ m$ Wurfhöhe $x = 45\ m$ Wurfweite
7) Bei 90° ist die Wurfhöhe am größten
8) $x'(\alpha) = 4v^2/g^* \cos 2\alpha = 0$ ➔ $2\alpha=90°$ ➔ $\alpha=45°$
9) $y = 3x/4 - x^2/320$; 240 m; H(120/45)



x	f (x)
0.	0
20.	275336
40.	399052
60.	454641
80.	479619
100.	490842
120.	495885
140.	498151
160.	499169
180.	499627
200.	499832

10)
Das Maximum mit 50 m/s = 180 km/h wird exakt erst im Unendlichen erreicht

11) $v = 3\ m/s = 10{,}8\ km/h$ $a = 3\ m/s^2$ $\alpha = 17°$ von der Senkrechten
($\tan \alpha = 3/10$)