Dr. Manfred Gurtner 2014

Wahrscheinlichkeit

1. Mengenmodell:

Ein Versuch kann mehrere Versuchsausgänge haben. Wenn man würfelt, ist das Ergebnis 1,2,3,4,5 oder 6. Alle möglichen Ergebnisse fasst man zu einer Menge – der **Ergebnismenge (Grundmenge)** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ zusammen.
Wenn man wettet, dass man eine Zahl größer als 4 wirft, so möchte man, dass ein Element des **Ereignisses** A = {5,6} auftritt. Es ist also günstig, wenn 5 oder 6 auftritt. Wenn man voraussetzen kann, dass alle Zahlen gleich häufig eintreten (**Laplace'scher Zufallsversuch**), so kann man die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses A einfach aus der Anzahl der Elemente der Menge A und der Anzahl der Elemente der Grundmenge Ω berechnen, nach der Formel:

$$\boxed{P(A) = \frac{Anzahl\ von\ A}{Anzahl\ von\ \Omega} = \frac{günstig}{möglich}}$$

P = Probability = Wahrscheinlichkeit

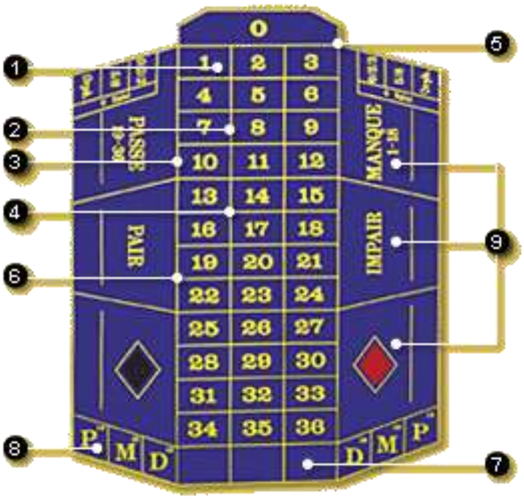
Beispiel 1:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln eine gerade Zahl zu würfeln?

Lösung:
Die Grundmenge ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, die Ereignismenge ist $A = \{2,4,6\}$, also ist die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Übungen:

1) Geben Sie die Grundmenge und das Ereignis in Mengenschreibweise an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:
   a) Münzwurf: Ereignis: Kopf
   b) Würfelwurf: Ereignis: „6"
   c) Würfelwurf: Ereignis: „Die Zahl ist durch 3 teilbar"
   d) Grundmenge: Wochentage, Ereignis: „Wochenende"
   e) Roulette: 0-36 Zahlen als Grundmenge =37 Zahlen!), Ereignis: „Impair" (Ungerade Zahlen)
   f) Roulette: Ereignis „Die ersten vier Zahlen"
   g) Roulette: Ereignis „Die Zahl 12"

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:
   a) Beim Würfeln eine gerade oder eine Zahl kleiner als 4 zu bekommen.
   b) Beim Roulette: „Manque(1-18)" oder „Zero" zu bekommen
   c) Beim Roulette: „Eine Zahl der dritten Kolonne (12 Zahlen)" oder „Eine Zahl des dritten Dutzends (12 Zahlen)" zu bekommen



3) In einer Familie gibt es 3 Buben und 2 Mädchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zufällig ein Mädchen dieser Familie anzutreffen?

4) Ein Kartenspiel enthält 20 Karten mit jeweils 5 Karten einer Farbe (Herz, Pik, Karo, Treff). Wenn ich eine beliebige Karte ziehe – wie groß ist die Chance
   a) eine beliebige Herzkarte zu ziehen   b) eine bestimmte Herzkarte (Herz−As) zu ziehen?

Vorsicht Falle: Die Wahrscheinlichkeiten **zweier Ereignisse addieren** sich nur, wenn die Ereignisse „unabhängig" voneinander sind, d.h. in der Mengenschreibweise, wenn die Mengen **kein Element gemeinsam haben:**

P(„5" oder „6" würfeln) = P(„5") + P(„6")
P(„gerade Zahl" oder „Zahl kleiner als 4" würfeln) $\neq$ P(„gerade Zahl") + P(„Zahl kleiner als 4")

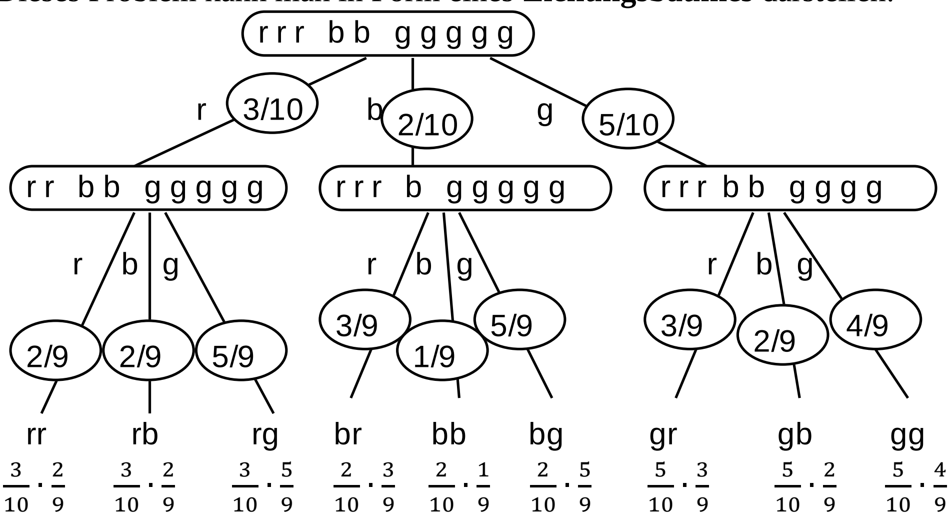
A= „gerade Zahl" = $\{2,4,6\}$ B= „Zahl kleiner als 4" $\{1,2,3\}$
$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$ $A\cap B=\{2\}$

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \quad = 3+3-1 \quad \textbf{(Additionssatz)}}$$

2. Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen:

Beispiel 2:
Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue und 5 grüne Kugeln. Ich ziehe jetzt der Reihe nach eine Kugel nach der anderen heraus, **ohne sie zurückzulegen**:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 grüne Kugeln zu ziehen, wenn man zwei Kugeln zieht.

Lösung:
Dieses Problem kann man in Form eines **Ziehungsbaumes** darstellen:



Hier gilt die PFADREGEL: Längs eines Pfades von der „Wurzel" des „Baums" zu den „Blättern" (die hier unten statt oben sind) muss man die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren!

z.B. Die Wahrscheinlichkeit für die Zugreihenfolge „gg" ist also $\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}$

Beispiel 3:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Zug „blau-grün" in dieser Reihenfolge oder in beliebiger Reihenfolge?

Lösung:

P(**bg**) = $\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{10}{90}=0{,}111=11{,}1\ \%$

P(bg **oder** gb) = $\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{20}{90}=0{,}222=22{,}2\ \%$

Hier gilt die BLATTREGEL: Die Wahrscheinlichkeiten der Blätter werden addiert!

Übungen:

5) Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue und 5 grüne Kugeln. Ich ziehe jetzt der Reihe nach eine Kugel nach der anderen heraus, **ohne** sie zurückzulegen, insgesamt 2 Kugeln.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 blaue Kugeln zu ziehen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit „rot-grün“ zu ziehen (in dieser Reihenfolge)
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine rote und eine grüne Kugel in **beliebiger Reihenfolge** zu ziehen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit **mindestens** eine rote Kugel zu ziehen bei 2 Zügen?

6) In einer Urne sind Kugeln, die die Nummern 1 bis 99 tragen. Eine Kugel wird blind gezogen. Es sei x die Nummer der gezogenen Kugel. Ermittle

a) $P(X<28)$	b) $P(50\leq X)$	c) P(X ist durch 3 teilbar)
d) P(X hat Einerziffer 0)	e) $P(\lvert X-50\rvert\leq 10)$	f) P(X ist eine Quadratzahl)

7) Eine Urne enthält den Buchstaben „S“ zwei Mal, den Buchstaben „A“ drei mal, den Buchstaben „R“ ein Mal.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SARA“ beim viermaligen Ziehen ohne Zurücklegen zu ziehen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „AAS“ beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen zu ziehen?

8) Bei 6 aus 45 werden der Reihe nach 6 Kugeln von 45 gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, alle 6 richtig zu erraten.
(Hinweis: Einen Baum der Form: richtig-richtig-...-richtig erstellen, die anderen Äste weglassen!)

9) Bei zufälliger Wahl der Klassensprecher bei einer Klasse mit 10 Mädchen und 15 Burschen
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Klassensprecher Mädchen sind?
b) – beide Burschen sind?
c) – der erste ein Bursch und der zweite ein Mädchen ist.
d) – der erste ein Mädchen und der zweite ein Bursch ist
e) – ein gemischtes Pärchen entsteht

10) Auf einem Schulfest wird das „Feuerwehrspiel“ gespielt. In einer Urne sind 5 bis auf die Beschriftung gleiche Kugeln. Zwei Kugeln tragen die Aufschrift „1“, drei die Aufschrift „2“. Man zieht dreimal je eine Kugel ohne Zurücklegen. Zuerst zahlt man 1 € Einsatz. Zieht man den Feuerwehrnotruf „122“, so gewinnt man 5€; wenn nicht, „verbrennt“ der Einsatz. Geben Sie alle möglichen Spielverläufe (samt Wahrscheinlichkeiten) an. Wie groß ist die Gewinnerwartung für den Spieler und für den Veranstalter? Ist das Spiel „fair“?

11) Wie groß ist die Chance beim „Bauernschnapsen“ (jeder erhält 5 Karten von 20 Karten)
a) alle 5 Karten einer Farbe (Herz, Kreuz, Pik oder Karo)zu bekommen („Ringerl“ oder „Gang“)
b) alle 4 Asse zu bekommen
c) König, 10 und As von der Atoutfarbe zu bekommen („Schnapser“)

12) Die Zwillinge Peter und Paul Faul haben die Hausübung nicht gemacht. Wie groß ist die Chance, dass a) Peter und Paul b) Peter aber nicht Paul c) Paul aber nicht Peter d) zumindest Peter e) zumindest Paul f) weder Peter noch Paul aufgerufen werden, wenn der Lehrer immer 2 von 20 Schülern kontrolliert.

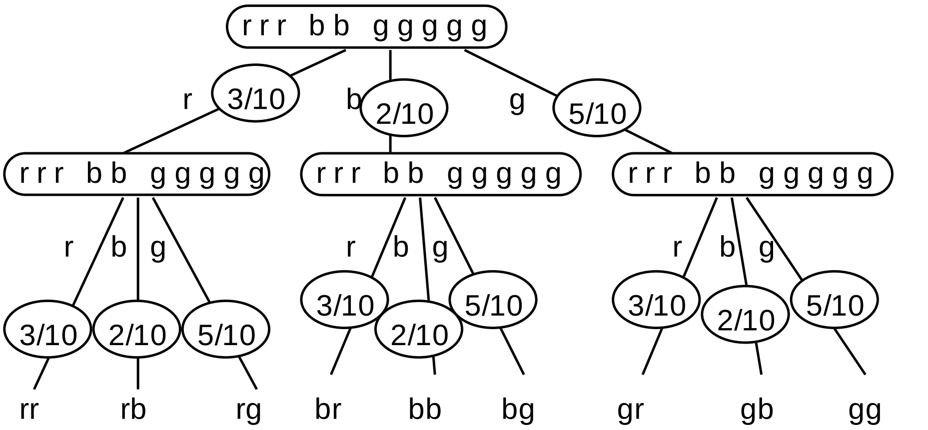
13) Aus den fünf Mädchen Antonia, Bärbel, Cäcilie, Doris und Elfi soll ein aus 3 der Mädchen bestehendes Team ausgelost werden.
a) Wie viele verschiedene Teams gibt es ? (Listen Sie alle auf!)
b) Wie groß ist für ein Mädchen die Chance in das Team gewählt zu werden?
c) Bärbel möchte gemeinsam mit Antonia ins Team, wie groß ist die Chance dafür?
d) Cäcilie möchte mit Antonia, aber nicht mit Doris ins Team, wie groß ist die Chance dafür?

14) Von 30 Fleischtassen sind 5 verdorben. Ein Kunde macht eine Stichprobe aus 3 Tassen und findet heraus, dass 2 von 3 Fleischtassen verdorben sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

3. Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen (Binomialverteilung):

Beispiel 4:
Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue und 5 grüne Kugeln. Ich ziehe jetzt der Reihe nach eine Kugel nach der anderen heraus und notiere die Farbe und **lege sie wieder zurück**:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 grüne Kugeln zu ziehen, wenn man zwei Kugeln zieht.

Lösung:
Dieses Problem kann man wieder in Form eines **Ziehungsbaumes** darstellen, nur sind die Pfadwahrscheinlichkeiten anders:



$\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}$ $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}$ $\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}$ $\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}$ $\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}$ $\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}$ $\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}$ $\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}$

$$P(gg) = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\,\%$$

Übungen:

15) Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue und 5 grüne Kugeln. Ich ziehe jetzt der Reihe nach eine Kugel nach der anderen heraus, notiere die Farbe und **lege Sie zurück**. Zieht man 2 Kugeln -
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 blaue Kugeln zu ziehen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit „rot-grün“ zu ziehen (in dieser Reihenfolge)
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine rote und eine grüne Kugel in beliebiger Reihenfolge zu ziehen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens eine rote Kugel zu ziehen bei 2 Zügen?

16) Eine Urne enthält den Buchstaben „S“ zwei Mal, den Buchstaben „A“ drei mal, den Buchstaben „R“ ein Mal.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „SARA“ beim viermaligen Ziehen **mit Zurücklegen** zu ziehen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Wort „AAS“ beim dreimaligen Ziehen **mit Zurücklegen** zu ziehen?

17) Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt (K) sei 0,52 (warum?) und für eine Mädchengeburt (M) sei 0,48 (warum?)
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Geburtsreihenfolge „MMK“ mit und ohne Beachtung der Reihenfolge
b) für „KKM“ mit und ohne Beachtung der Reihenfolge

18) Das Passwort eines Handy besteht aus 4 Ziffern (von 0 bis 9). Wie groß ist die Chance, es bei einem Zug zu erraten? (Baum: richtig-richtig-richtig-richtig)

4. Kombinatorik:

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Bestimmung der **Anzahl von Möglichkeiten** Dinge in beliebiger Reihenfolge zu platzieren (Permutationen und Kombinationen)

Beispiel 5:
Wie viele Sitzmöglichkeiten haben 4 Personen, wenn sie auf 4 Plätzen in beliebiger Reihenfolge sitzen sollen?

Lösung:
Die 4 Personen nennen wir Anton, Berta, Cecilie, Dora, kurz A,B,C,D.
Dann können wir die möglichen Sitzreihenfolgen so aufschreiben:

AB-CD	**AB**-DC	AC-BD	AC-DB	AD-BC	AD-CB
BA-CD	BA-DC	BC-AD	BC-DA	BD-AC	BD-CA
CA-BD	CA-DB	CB-AD	CB-DA	CD-AB	CD-BA
DA-BC	DA-CB	DB-AC	DB-CA	DC-AB	**DC-BA**

Also sind es 4·6=24 Möglichkeiten!
Das ist eher sehr umständlich. Wie könnte man das auf eine Formel bringen?

Wir setzen auf den 1.Platz eine von 4 Personen. Dann setzen wir auf den 2.Platz eine von nunmehr 3 verbliebenen Personen, auf den 3.Platz setzen wir eine von 2 Personen, am letzten Platz nimmt die letzte Person Platz. Wir haben also **4·3·2·1 Möglichkeiten** für die Platzvergabe.

1..4	1..3	1..2	1
P1	P2	P3	P4

Die Anzahl der Platzvertauschungen (Permutationen) ist bei n Personen und n Plätzen: Perm(n,n)= n·(n–1)·(n–2)·(n–3)·...·2·1 = n ! (n-Faktorielle oder n-Fakultät)

Beispiel 6:
Wie viele Fahnen können aus den 5 Farben weiß, rot, gold, grün und blau gemacht werden, wenn eine Fahne aus drei Farben in einer bestimmten Reihenfolge (von oben nach unten) besteht und keine Farbe doppelt vorkommt?

Lösung:
Jetzt sind nur 3 Farben von 5 Farben auszuwählen. Also gilt die obige Formel nicht mehr. Auf den ersten Platz der Fahne kann man 5 Farben geben, auf den 2.Platz kann man dann nur mehr 4 Farben wählen, am dritten Platz nur mehr 3. Da man das unabhängig voneinander machen kann, sind es **5·4·3 = 60** Möglichkeiten

Die Anzahl der Platzvertauschungen (Variationen) ist bei n Personen und k Plätzen: Perm(n,k)= n·(n–1)·(n–2)·(n–3)·...·(n–k+1) = $\frac{n!}{(n-k)!}$

Beispiel 7:
Wie viele Teams aus 3 Personen kann man aus einer Gruppe von 6 Personen machen?

Lösung:
Die Personen mögen A,B,C,D,E,F heißen, dann gibt es folgende Teams:

ABC	ABD	ABE	ABF	ACD	ACE	ACF	ADE	ADF	AEF
				BCD	BCE	BDF	BDE	BDF	BEF
							CDE	CDF	CEF
									DEF

Das heißt, es gibt 20 mögliche Teams

Die Anzahl der Teams (Kombinationen) mit k Personen, die man aus n Personen bilden kann, sind:

Komb(n,k) = $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$ **das ist der BINOMIALKOEFFIZIENT**

Beweis: Wenn man alle Variationen von n Personen auf k Plätzen ansieht, so gibt es z.B. die Platzverteilungen: ABC, ACB, BAV, BCA, CAB, CBA, die alle mit denselben Personen gebildet werden. Die Anzahl dieser Platzvertauschungen ist k!, also gibt es um k! mal mehr Platzvertauschungen als Teambildungen.

Beispiel 8:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben AABBB zu Wörtern zu formen, die alle verschieden sind ?

Lösung:
Hier kann man zuerst wieder probieren:
AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA
Das ergibt 4+3+2+1 = 10 Möglichkeiten
Wörter mit 5 Buchstaben ergeben 5! = 5·4·3·2.1 = 120 Möglichkeiten. Identifiziert man A,B mit A und C,D,E mit B, dann erhält man die obigen Wörter. Daher muss man durch die Vertauschungsmöglichkeiten von A,B und die Vertauschungsmöglichkeiten von C,D,E dividieren:
$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ das ist schon wieder der BINOMIALKOEFFIZIENT!

Die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten von n Buchstaben, wobei k gleich sind (z.B. A) und n−k ebenfalls gleich sind (z.B: B) sind:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$ **das ist der BINOMIALKOEFFIZIENT**

EINGABE im TASCHENRECHNER TI−30:

Permutation:	10!	➔ mit: **10 $\boxed{\text{PBR}}$ >> = =**
Permutation:	10!/(10−3)! = 10 nPr 3	➔ mit: **10 $\boxed{\text{PRB}}$ 3 =**
Kombination:	$\binom{10}{3}$ = 10 nCr 3	➔ mit: **10 $\boxed{\text{PRB}}$ > 3 =**

Übungen:

19) Wie viele Möglichkeiten hat ein Teamcoach, die Reihenfolge der 5 Torschützen bei einem Fußball−Elfmeterschießen zu bestimmen?
20) Wie viele verschiedene (auch sinnlose) Wörter kann man durch Vertauschen der Buchstaben des Wortes GEBURT bilden?
21) Beim einfachen Canasta−Spiel bekommt jeder Spieler ein „Blatt" aus 11 Karten von insgesamt 108 unterscheidbaren Karten. Wie viele verschiedene „Blätter" kann ein Spieler bekommen?
22) Wie viele vierstellige Zahlen mit vier verschiedenen Ziffern gibt es? (0 am Beginn ist erlaubt)
23) In einer Herberge sind 8 Zimmer frei und es kommen 5 Wanderer. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten der Zimmer(−schlüssel) auf die Wanderer gibt es?
24) An einem Wettbewerb nehmen 10 Leute teil. Wie viele Möglichkeiten für das Siegespodest (1.2.und 3.Platz) gibt es?

25) Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto 6 aus 45?
26) Wie viele Möglichkeiten gibt es ein Verhandlungsteam aus 3 Personen zu bilden, wenn 12 Personen dafür in Frage kommen?

27) Bei einer Prüfung sind 10 Fragen zu beantworten. Das Prüfungsergebnis ist positiv, wenn mindestens 8 Fragen richtig beantwortet werden. Wie viel Möglichkeiten gibt es a) genau 8, b) genau 9, c) alle Fragen richtig zu beantworten?
Hinweis: Bilde Wörter aus den Buchstaben r (richtig) und f (falsch)

28) Wie oft schütteln sich 8 Personen die Hände (oder stoßen mit Gläsern an)?
29) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Bildung von verschiedenen Zahlen aus folgenden fünf Ziffern:
a) wenn man die Ziffern 1,2,3,4,5 verwendet?
b) wenn man die Ziffern 2,2,5,5,5 verwendet?
c) wenn man die Ziffern 1,4,4,4,4 verwendet?
30) Morsezeichen werden aus den Zeichen „·" und „–„ gebildet. Wie viele „Wörter" lassen sich daraus darstellen, wenn genau die 5 Zeichen …− − verwendet werden?

5. Binomialverteilung: (siehe auch: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch2.htm)

Thema dieses Kapitels ist der **wiederholte Münzwurf mit einer unsymmetrischen Münze**, oder anders formuliert: **Ziehen** von Kugeln aus einer Urne **mit Zurücklegen**. Wobei nur 2 verschiedene Möglichkeiten (Bi−) gegeben sind!
Das lässt sich mit Baumdiagrammen auch gut nachvollziehen (siehe 3.), nur wird es bei vielen Münzwürfen zu schwierig zu einer Wahrscheinlichkeit zu kommen, deshalb wollen wir uns jetzt um die Formel für dieses Ereignis bemühen:

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k q^{n-k}}$$

Hier bedeutet:
P ist die Wahrscheinlichkeit bei allen n Münzwürfen k positive Würfe ("KOPF") zu bekommen (englisch: probability, daher kommt der Buchstabe P)
X ist das gesuchte Ereignis ("KOPF")
k ist die Anzahl der positiven Ausgänge der Münzwürfe (= Anzahl von "KOPF")
n ist die Anzahl der Münzwürfe
p ist die Wahrscheinlichkeit für "KOPF" bei einem einzelnen Münzwurf
q = 1–p ist die Gegenwahrscheinlichkeit zu p, also die Wahrscheinlichkeit für "ZAHL" bei einem einzelnen Münzwurf

$\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, den man am schnellsten mit n **PRB → nCr** k beim Taschenrechner TI-30X II erreicht.

Beispiel 9:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln mit 5 Würfeln genau zwei „6"er zu bekommen? (oder: mit einem Würfel zweimal „6" zu bekommen − bei 5 mal würfeln)

Lösung:
Zuerst prüfen wir die Voraussetzungen der Binomialverteilung:
− es gibt 2 Möglichkeiten: „6" oder „nicht 6" zu werfen (Bi−)
− jedes Mal ist die Wahrscheinlichkeit für „6" die gleiche, nämlich p=1/6

dann ist n=5 (Anzahl der Versuche) und k=2 (günstige Ausgänge)
$P(X=2) = \binom{5}{2}\cdot (1/6)^2\, (1-1/6)^{(5-2)} = 0{,}16075 =$ **16,1 %**

Übungen:

31) Man würfelt mit einem gewöhnlichen Würfel 5 mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) genau 3mal „1“ kommt b) genau 4mal „1“ kommt c) genau 5mal „1“ kommt
d) mindestens 3mal „1“ kommt e) höchstens 1mal“1“ kommt

32) Ein Spielautomat verspricht in 30% der Fälle einen Gewinn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man von 10 Spielen a) genau 2mal gewinnt b) genau 3mal gewinnt
c) genau 4mal gewinnt d) höchstens 2mal gewinnt e) mindestens 3mal gewinnt

33) Maya spielt an einem Roulettetisch die einfache Chance „**rouge**“ (p=18/37). Wie groß ist die Chance bei 8 Spielen a) genau 5mal zu gewinnen b) genau 6mal zu gewinnen
c) genau 4mal zu gewinnen d) zwischen 4 und 6mal zu gewinnen e) nie zu gewinnen

34) Laptops werden mit der Güte von 3% erzeugt (3% der Produktion sind beschädigt). Zur Kontrolle werden 20 Laptops überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0,1,2 bzw.3 davon beschädigt sind?

35) Für eine Prüfung lernt Christine die Vokabeln und kann sie mit 70% Sicherheit.
a) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 4 Vokabeln geprüft wird?
a) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 8 Vokabeln geprüft wird?
b) Wie groß ist die Chance, dass sie alle richtig hat, wenn sie 12 Vokabeln geprüft wird?

36) Eine Knabengeburt hat die Wahrscheinlichkeit von ca. 51,3%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 6 Kindern mehr als die Hälfte Buben sind?

37) In einem Buch mit 250 Seiten sind 34 Druckfehler verstreut. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Seite
a) keinen b) einen c) zwei d) mindestens 2 Druckfehler enthält?

38) Bei Flügen wird gerne überbucht, da es bei durchschnittlich 12% der Buchungen zu Stornierungen kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 80 Plätzen die Überbuchung mit 83 Personen gut geht, das heißt, dass von 83 gebuchten Plätzen mindestens 3 nicht in Anspruch genommen werden?

39) Kann man Parapsychologie beweisen? Bei einem Test auf Hellsehen soll der „Magier“ die Farbe der Spielkarte (Herz, Karo, Pik, Treff) nennen. Bei 10 Versuchen rät der „Magier“ 7 mal richtig. Ist das ein Beweis für die Fähigkeit des Hellsehens? Argumentiere mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit!

40) Ein AIDS−Test beweist mit 99% Wahrscheinlichkeit, dass man AIDS hat. Es wird empfohlen einen zweiten Test zu machen, wenn der erste Test AIDS nachweist, da es auch sein kann, dass der erste Test mit 1% Wahrscheinlichkeit falsch ist. Wie groß ist die Chance, dass zwei AIDS−Tests falsch sind?

41) Zwei Spieler spielen mit der Spielstärke 40% und 60% gegeneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der schwächere Spieler
a) 1 Spiel gewinnt? b) 2 von 5 Spielen gewinnt? c) 4 von 10 Spielen gewinnt?
d) Was bedeutet das für Spiele wie Fußball oder Tennis?

42) Ein Spieler soll mir die Symbole „Stein“ (geballte Faust), „Schere“ (Zeige− und Mittelfinger) und „Papier“ (flache Hand) zeigen und ich rate, welches Symbol kommt. Wie oft muss ich raten, damit ich mit mindestens 90%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Symbol richtig errate?

43) Ein Spieler darf nach Einsatz von 8€ mit 3 Würfeln werfen und bekommt bei einem Sechser 10€, bei zwei Sechsern 25€ und bei drei Sechsern 50€ ausbezahlt. Ist das Spiel fair? Falls nicht, wie müsste der Einsatz geändert werden, damit es fair wird?

44) Beim Würfelpoker gibt es die Möglichkeit mit 5 Würfeln ein Paar aus zwei Fünfern und sonst anderen Zahlen zu werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür? Kann man das mit der Binomialverteilung rechnen? Wenn nein, wie sonst?

45) Beim Würfelpokern gibt es ein Full House aus einem Paar und einem Drilling. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für 22555! Kann man da die Binomialverteilung benutzen, etwa so:
$\binom{5}{2}\cdot (1/6)^2\ (1-1/6)^{(5-2)} = 16{,}1\%$? Wenn nein, warum nicht?

weitere Übungen: 9−16 von http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch1_ueb.htm
http://ilias.vhs21.ac.at/2bw/mathe/themen/Stoch/UE_Binomialverteilung_Gurtner_SS05.htm

Lösungen:

1a) Ω = {Kopf, Zahl} A = {Kopf} P(A) = 50% b) Ω = {1,2,3,4,5,6} A = {6} P(A) = 1/6 = 16,7%
 c) Ω = {1,2,3,4,5,6} A = {3,6} P(A) = 2/6 = 33,3%
 d) Ω = {MO,DI,MI,DO,FR,SA,SO} A = {SA,SO} P(A) = 2/7 = 28,6%
 e) Ω = {0,1,2,...,36} A = {1,3,5,...,35} P(A) = 18/37 = 48,6%
 f) Ω = {0,1,2,...,36} A = {1,2,3,4} P(A) = 4/37 = 10,8% g) Ω = {0,1,2,...,36} A = {12} P(A) = 1/37 = 2,7%

2a) P(A) = 5/6 = 83,3% b) P(A) = 19/37 = 51,4% c) P(A) = 20/37 = 54%
3) P(Mädchen) = 2/5 = 40%
4) a) P(beliebige Herzkarte) = 5/20 = 25% b) P(Herz−As) = 1/20 = 5%

5) a) P(bb) = 2/10· 1/9 = 2,2% b) P(rg) = 3/10·5/9 = 16,7% c) P(rg *Vertauschung) = 15/90*2 = 33,3%
 c) P(rr+rb+rg+br+gr) = 53,3%
6) a) 27/99 b) 49/99 c) 33/99 d) 9/99 e) 21/99 f) 9/99
7a) Wurzel → (2/6)→ S → (3/5)→ A → (1/4) → R → (2/3) → A → Blatt P(SARA) = 3,3%
 b) P(AAS) = 3/6· 2/5 ·2/4 = 10%
8) P(rrrrrr) = 6/45·5/44·4/43·3/42·2/41·1/40 = $1{,}2\cdot 10^{-7}$ = 1: 8145060 (Kehrwert)
9)a) P(MM) = 10/25·9/24 = 15% b) P(BB) = 15/25·14/24 = 35% c) P(BM) = 15/25·10/24 = 25%
 d) P(MB) = 10/25·15/24 = 25% e) P(BM*Vertauschung) = 25%*2 = 50%
10) P(Gewinn des Spielers) = 20% P(Verlust des Sp.) = 80% Gewinnerwartung des Spielers = 0 €
 P(Gewinn des Veranstalters) = 80% P(Verlust des V.) = 20% Gewinnerwartung des V. = 0 €
 Das Spiel ist fair (Gewinnerwartung ist Null, beide gewinnen und verlieren gleich oft)
11a) P(HHHHH) = 5/29·4/19·3/18·2/17·1/16 = 0,0064% = 1:15504 ➔P(5mal gleiche Farbe)= 4* 0,0064% = 0,025%
 b) P(4 mal As und 1 mal beliebig) = $\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot\frac{1}{17}\cdot\frac{16}{16}\cdot 5 =$ 0,00103 = 0,1 %
 c) P(K,10,As in Herz und 2 beliebig) = $\frac{3}{20}\cdot\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{17}\cdot\frac{16}{16}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 0{,}00877 = 0{,}88\%$

12) a) P(Peter, Paul *Tausch) = 1/20·1/19*2 = 0,5% b) P(Peter, ≠Paul *Tausch) = 1/20·18/19*2 = 9,4%
 c) P(Paul,≠Peter * Tausch) = 9,4% d) P(Peter, irgendeiner *Tausch) = 1/20·19/19 *2 = 10%
 e) P(Paul , irgendeiner * Tausch) = 10% f) P(≠PeterPaul ≠PeterPaul) = 18/20·17/19 = 80,5%
 alle Fälle sind : a)+b)+c)+f) d) umfasst a) und b) e) umfasst a) und c)
13a) ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE sind 10 Teams
 b) P(A) = 6 von 10 Teams = 60% c) P(ABX) = 3/10 = 30% d) P(AC,≠D) = 2/10 = 20%
14) P(VVG*Tausch) = 5/30·4/29·25/28*3 = 6,1%
15) a) P(bb) = 2/10·2/10 = 4% b) P(rg) = 3/10·5/10 = 15%
 c) P(rg*Tausch) = 15%*2 = 30% d) P(rr+rb+rg+br+gr) = 51%
16) a) P(SARA) = 1,4% b) P(AAS) = 8,3%
17) a) P(MMK) = 12% P(MMK*Tausch) = 35,9% b) P(KKM) = 13% P(KKM*Tausch) = 39%
18) P(rrrr) = $(1/10)^4$ = 0,01%
19) 5! = 120 Möglichkeiten
20) 6! = 720 Möglichkeiten
21) 108!/(108−11)! = 108 **nPr** 11 = $1{,}377\cdot 10^{22}$ Möglichkeiten
22) 10 **nPr** 4 = 5040
23) 8 **nPr** 5 = 6720
24) 10 **nPr** 3 = 720
25) 45 **nCr** 6 = 8.145.060 Möglichkeiten
26) 12 **nCr** 3 = 220 Möglichkeiten
27) a) 10 **nCr** 8 = 45 Möglichkeiten b) 10 **nCr** 9 = 10 Möglichkeiten c) 1 Möglichkeit
28) 8 **nCr** 2 = 28
29) a) 5! = 120 b) 5 **nCr** 2 = 10 c) 5 **nCr** 1 = 5
30) 5 **nCr** 3 = 10 nämlich**: …–– (3) ..–.– .–..– –…–(=) ..––. .–.–. (+) –..–. (/) .––.. –.–.. ––… (7)**
31) a) 3,21% b) 0,32% c) 0,01% d) 3,5% e) 80,4%
32) a) 23,3% b) 26,7% c) 20% d) 38,3% e) 61,7%
33) a) 20,7% b) 9,8% c) 27,3% d) 57,7% e) 0,5%
34) a) P(0) = 54,4% P(1) = 33,6% P(2) = 9,9% P(3) = 1,8%
35) a) 24% b) 5,8% c) 1,4% 36) 68%
37) a) n=34, p=34/250, k=0 ➔ P=0,7% b) 3,7% c) 9,6% d) 95,6%
38) 99,8% 39) Er rät mit 0,35% Wahrscheinlichkeit 7 oder mehr richtig, es ist also ein guter Hinweis aus Hellsehen (Erwartungswert bei 10 Versuchen = ¼ *10 = 2½ richtige Versuche)
40) 0,01² = 0,0001 = 0,01%
41) a) 40% b) 34,6% c) 25,1% d) je öfter gespielt wird, umso klarer ist der Gewinner (beim Tennis)
42) mindestens 6 mal 43) 5,44−8€ = −2,56€ Verlust. Der Einsatz müsste auf 5,44€ gesenkt werden.
44) ja, n=5, p=1/6, k=2 ➔ P=16,1% 45) nein, das ist falsch, weil „2“ die Wahrscheinlichkeit 1/6 hat, „5“ auch, die Summe beider Ereignisse müsste aber 1 ergeben. Richtig wäre P=günstig/möglich=$10/6^5$ = 0,1%