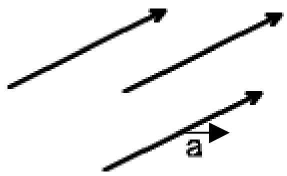
Vektorrechnung

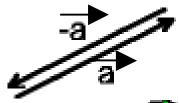
Links: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/vektoren1.htm
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/vektoren2.htm
http://www.mathematik.net/vektoral/va01.htm

Definitionen und Bezeichnungen:

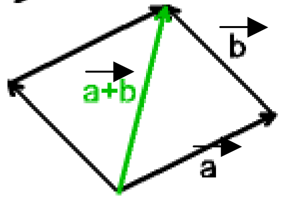
Ein ***Vektor* a** ist eine gerichtete Größe (in der Physik: Kraft, Geschwindigkeit,...) Er kann durch einen Pfeil dargestellt werden (Repräsentant des Vektors).
Die Länge des Pfeils bezeichnet man als ***Betrag*** des Vektors.
Alle gleichlangen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile gehören zum selben Vektor.
Im Unterschied dazu heißen gewöhnliche Zahlen jetzt: ***Skalar***



(Bemerkung: Vektoren werden im Folgenden mit darüber gestelltem Pfeil dargestellt.)



Der zu $\vec{a}$ entgegengesetzte Vektor $\overrightarrow{-a}$ heißt ***Gegenvektor*** von $\vec{a}$.

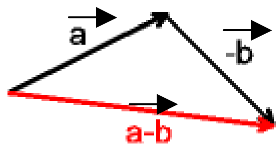


Zwei Vektoren werden **addiert**, indem man ihre Repräsentanten "aneinanderhängt". Aus dem dargestellten Parallelogramm ergibt sich:

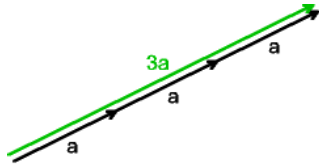
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Die Summe aus einem Vektor $\vec{a}$ und seinem Gegenvektor $\overrightarrow{-a}$ ist der ***Nullvektor*** $\vec{0}$

$$\vec{a}+\overrightarrow{-a}=\vec{0}$$



Zwei Vektoren werden **subtrahiert**, indem man **b** auf **a** ergänzt ("b plus wieviel ist a?") oder besser: **-b** zu **a** addiert.

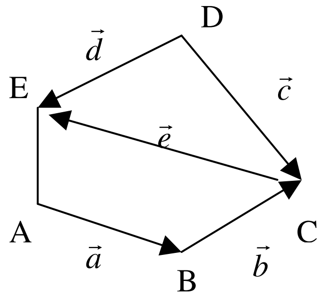


Ein Vektor wird **mit einem Skalar k multiplizert**, indem man ihn um den Faktor k streckt bzw. staucht.
Der Vektor k·**a** ist parallel zu **a** und
gleich orientiert, wenn $k > 0$
entgegengesetzt orientiert, wenn $k < 0$
Zwei Vektoren sind genau dann **parallel**, wenn der eine das k-fache des anderen ist.

Beispiel:
In nebenstehendem Fünfeck sind folgende Vektoren gegeben:

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ $\vec{d}=\overrightarrow{DE}$ $\vec{e}=\overrightarrow{CE}$

Gesucht: Mit welcher Vektorsumme komme ich von A nach C ?
Mit welcher Vektorsumme komme ich von A nach D?
Geben Sie 2 Wege von A nach D an!

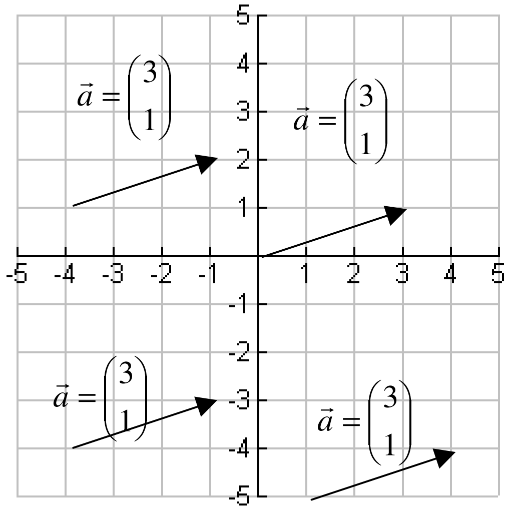


Lösung: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{CE}=\vec{e}$ *oder* $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=-\vec{c}+\vec{a}$

Koordinatendarstellung von Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektoren sind eine Verallgemeinerung von Pfeilen. <u>Ein Vektor ist die Menge aller gleich langen und gleich gerichteten Pfeilen</u>. Das drückt sich auch in den Koordinaten eines Vektors aus:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißt: 3 rechts, 1 rauf, egal von welchem Anfangspunkt!

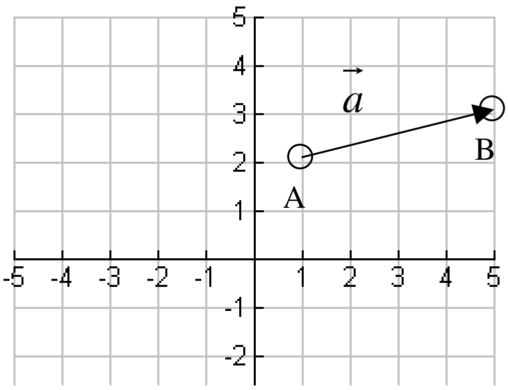
> <u>**Anwendung der Vektorrechnung:**</u>
> ***Zeichenprogramme*** arbeiten meist vektororientiert, was den Vorteil hat, dass die Objekte verschiebbar und beliebig vergrößer– und verkleinerbar sind.
>
> **Aufgabe:** Verschieben Sie einen Fernseher im Zimmergrundriss!

Wie hängen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit Punkten A,B,C,D zusammen ?

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A(1,2) und B(5,3). Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

Lösung:



Um die Koordinaten zu bestimmen, müssen wir nur von A ausgehen und 4 Einheiten nach rechts gehen und 1 Einheit nach oben gehen und dann sind wir bei B. Das heißt, die Koordinaten von $\vec{a}$ sind: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

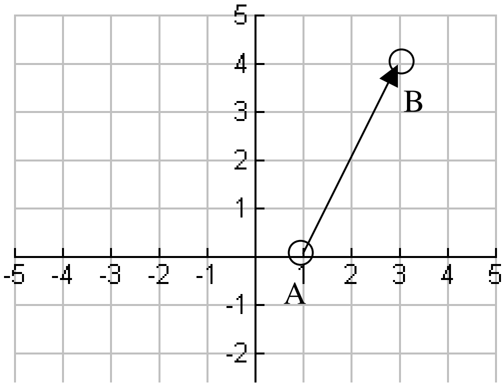
Daraus folgt: **Vektorkoordinaten sind Relative Koordinaten** des Endpunktes in Bezug auf den Anfangspunkt, oder noch einfacher:

1) SPITZE MINUS SCHAFT – REGEL: $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel:

Gegeben sind ein Punkt A(1|0) und ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Was passiert, wenn man den Vektor an den Punkt A anhängt. Wohin zeigt dann die Spitze des Vektors? Nennen wir diesen Punkt B. Welche Koordinaten hat B?

Lösung:



B hat die Koordinaten B(3|4).

Diese erhält man auf die folgende Art:

$$B = A + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

daraus folgt:

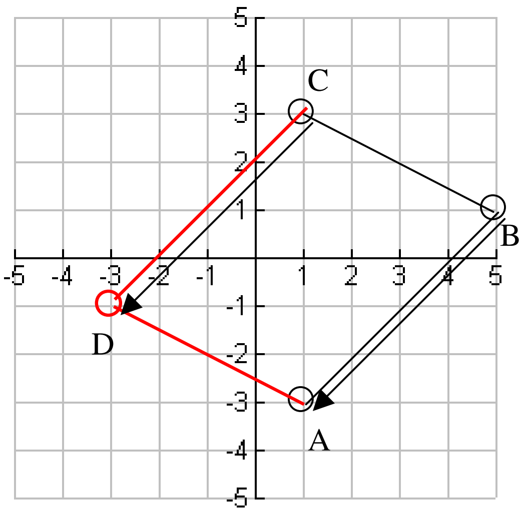
2) PVP-REGEL (PUNKT + VEKTOR = PUNKT): $A + \overrightarrow{AB} = B$

Beispiel:

Gegeben sind 3 der vier Eckpunkte eines Parallelogramms: A(1|-3), B(5|1) , C(1|3). Gesucht ist der vierte Punkt durch gezielte Anwendung der Vektorbildung

Lösung:

Da der Vektor $\overrightarrow{BA}$ gleich dem Vektor $\overrightarrow{CD}$ ist, kann man diesen Vektor aus den Koordinaten von B und A bestimmen und dann an den Punkt C anhängen:



$$\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$ **(Spitze – Schaft-Regel)**

$\overrightarrow{CD} = D - C \qquad | + C$

$D = C + \overrightarrow{CD}$

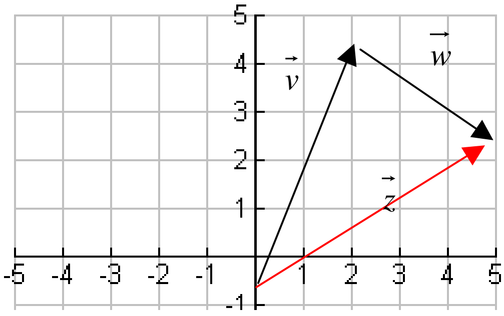
$D = C + \overrightarrow{BA}$

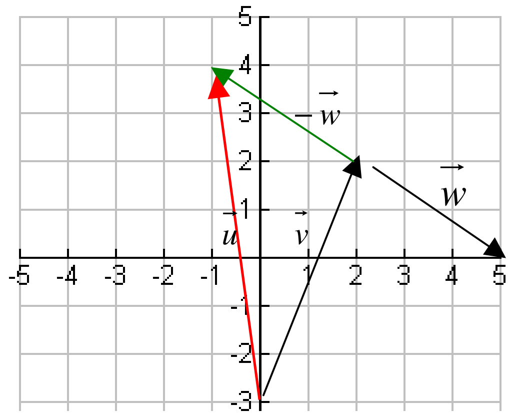
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt D (-3| -1)

3) Parallele Vektoren erkennt man daran, dass die Koordinaten gleich oder ein bestimmtes Vielfaches voneinander sind: $\vec{v} = k * \vec{w}$ zum Beispiel: $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v} \text{ und } \vec{w} \text{ sind parallel.}}$

4) Vektoraddition: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{z}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

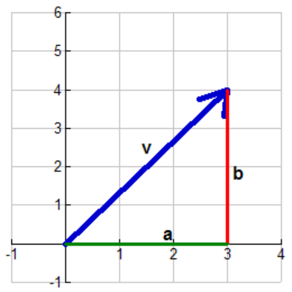




5) Vektorsubtraktion: $\vec{v} - \vec{w} = \vec{u}$ ➔ Addition des Gegenvektors: $\vec{v} + (-\vec{w}) = \vec{u}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6) Vervielfachen eines Vektors $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ $\vec{w} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$



7) Länge eines Vektors = Vektorbetrag: $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(Lehrsatz des Pythagoras)

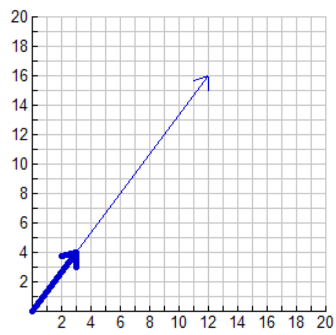
8) Einheitsvektor: Vektor mit Länge 1, ergibt sich, wenn man den Vektor durch seinen Betrag (=Länge) dividiert:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9) Vektor mit bestimmter Länge: ergibt sich, wenn man den Einheitsvektor mit der gesuchten Länge k multipliziert: $k \cdot \vec{a}_0 = k \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Beispiel:

Gehe 20 km in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



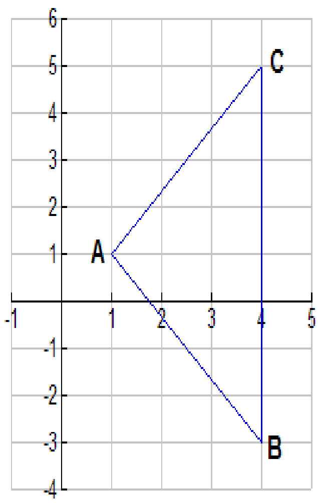
Lösung:

Dazu bestimme ich zuerst die Länge des Vektors : $|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| =$

$= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Da der gesuchte Vektor 20 km lang sein soll, muss ich $\vec{v}$ mit 4 multiplizieren: $4\vec{v} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$

Beispiel:
Ist das Dreieck A(1|1), B(4|–3), C(4|5) gleichschenkelig(–seitig)?
Wenn ja, welche Seiten sind gleich lang und wie lang?



Lösung:
Wir berechnen einfach die Längen der Seiten. Dazu stellen wir die Seitenvektoren auf und bestimmen den Vektorbetrag:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64} = 8$$

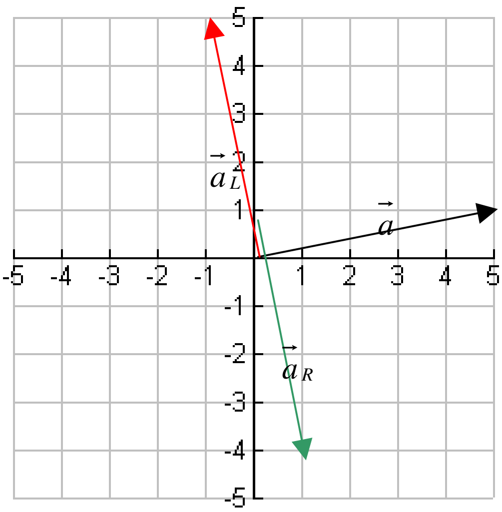
$$\overrightarrow{CA} = A - C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Die Seitenlängen sind also 5,8,5 und daher sind die Seiten AB und AC gleich lang.

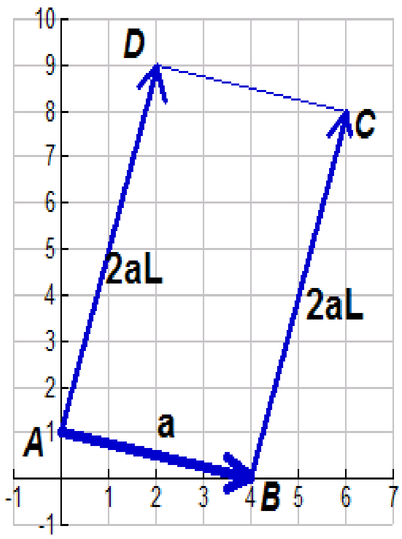
10) rechtwinkeliges Kippen ➔ Normalvektor bestimmen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

➔ **Koordinaten vertauschen und** oben (für links-kippen) oder unten (für rechts-kippen) **ein Vorzeichen ändern**



Beispiel:
Gegeben sind zwei Punkte eines Rechtecks: A(0|1) und B(4|0)
Wie lauten die Koordinaten der übrigen Punkte, wenn die zweite Seite doppelt so lang wie die erste Seite sein soll?



Lösung:
Wir bilden den Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

und kippen ihn nach links $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, verdoppeln ihn: $2\vec{a}_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

und hängen ihn mit der PVP–Regel an die Punkte A und B an:

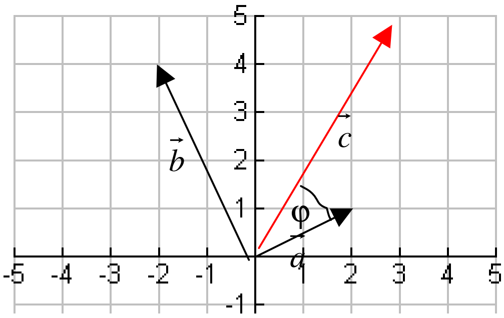
$$C = B + 2\vec{a}_L = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$D = A + 2\vec{a}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

11) Skalares Produkt von Vektoren: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = p \cdot r + q \cdot s$

oben mal **o**ben **plus u**nten mal **u**nten!

Wenn das **skalare Produkt** von Vektoren **Null** ist, stehen die Vektoren aufeinander **rechtwinkelig !**



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = -4 + 4 = \quad 0$$

12) nur für M2/M3: Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$: $\cos \varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}$

Beispiel: Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **und** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{34}} = 0{,}8437 \implies \varphi = \cos^{-1}(0{,}8437) = 32{,}47°$$

Physikalische Bedeutung des skalaren Produkts:

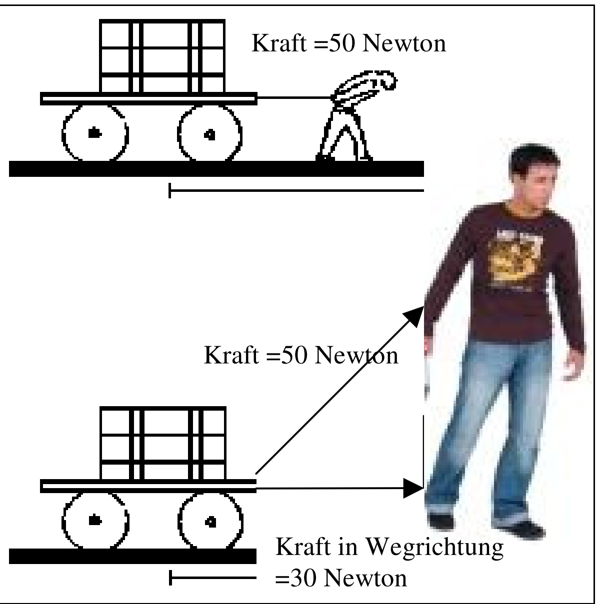
In der Physik gibt es den Begriff der Arbeit, der aus der Krafteinwirkung auf einen Körper und dem zurückgelegten Weg besteht: **Arbeit = Kraft mal Weg** (z.B.: 50 Newton·20m = **1000 J**)

Jetzt ist aber dieses Gesetz nur dann gültig, wenn Kraft und Weg in die gleiche Richtung gehen. Das skalare Produkt liefert den richtigen Zusammenhang:
Arbeit = Kraftvektor skalar multipliziert mit dem Wegvektor

Beispiel: Kraft = 50 Newton (≈5 kg Schwerkraft) in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

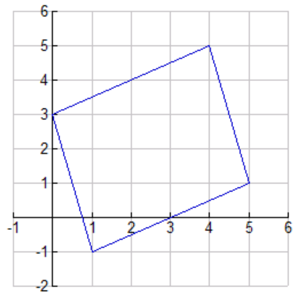
ergibt den Kraftvektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$, multipliziert mit dem Wegvektor

$\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt: $\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = 30 \cdot 20 + 40 \cdot 0 = 600\ Nm$ = **600 J**



Beispiel: Bestimmen Sie den Typ des Vierecks ABCD [A(1|–1), B(5|1), C(4|5), D(0|3)]
(Ist es ein Quadrat, ein Rechteck, ein Parallelogramm, ein Rhombus, ein Deltoid, ein Trapez oder ein allgemeines Viereck?).
Verwenden Sie das Parallelitäts- und Orthogonalitätskriterium sowie die Formel für die Länge von Vektoren.

Lösung:



Zuerst werden wir die Seitenvektoren und deren Längen aufstellen:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}1$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$$

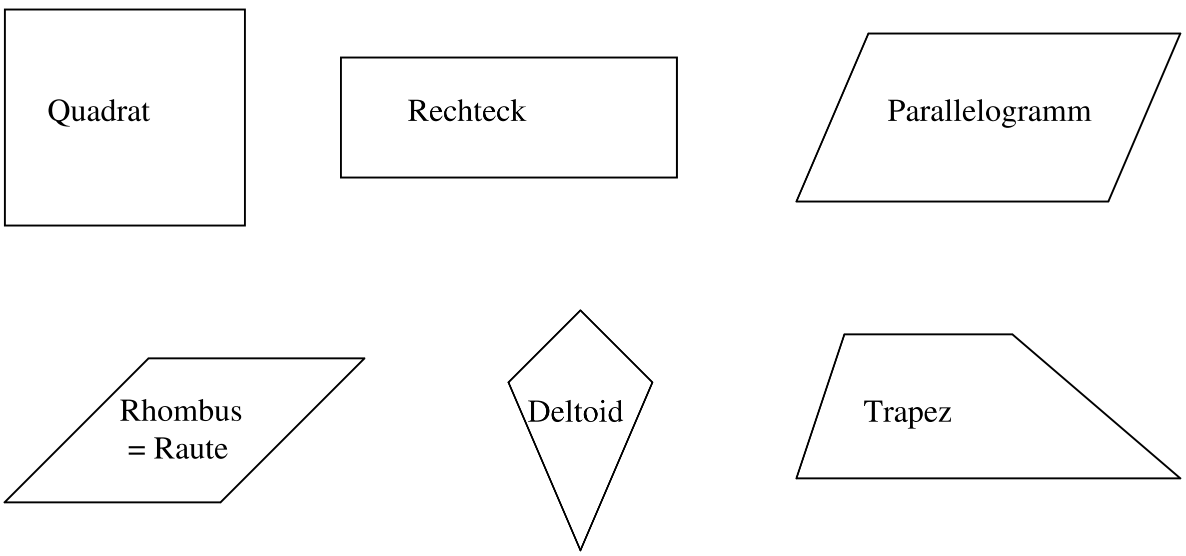
$$\overrightarrow{DA} = A - D = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}1$$

Parallelitätskriterium: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ → **Parallelogramm**
(man versuche zwei gleich lange Bleistifte parallel zu halten, es entsteht immer ein Parallelogramm dabei!)
Orthogonalitätskriterium: Dazu berechnen wir das skalare Produkt:

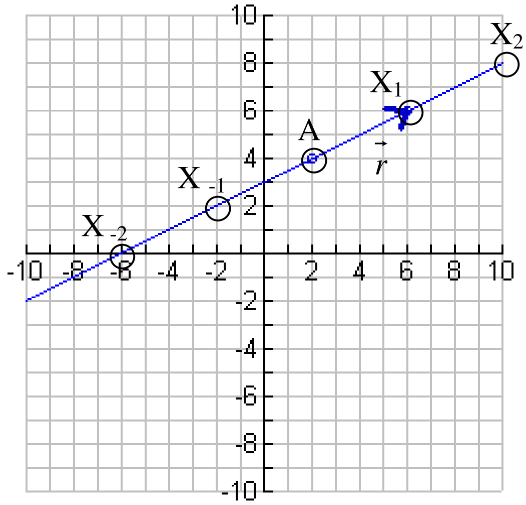
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 4$$

Das ist nicht Null, daher kein rechter Winkel bei B → **kein Rechteck**
Länge: je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang, die anliegenden Seiten sind nicht gleich lang → **kein Quadrat**

also ist es ein **Parallelogramm**



Geradendarstellung



Die Punkte auf einer Geraden lassen sich folgendermaßen finden:
Gegeben sei der Punkt A und der Richtungsvektor $\vec{r}$. Dann ergibt sich:

$X_1 = A + 1\cdot\vec{r}$	$X_2 = A + 2\cdot\vec{r}$	$X_3 = A + 3\cdot\vec{r}$	....	$X_t = A + t\cdot\vec{r}$

Daraus folgt die **Geradendarstellung in Parameterform** (Parameter t)

$$\boxed{g:\ \ X = A + t\cdot\vec{r}}$$

Beispiel 1:
a) Gesucht ist die Parameterdarstellung der Geraden g durch A(-3|2) und B(5|-3).
b) sind C(-19|12) und D(5|3) auf der Geraden g ?
c) Wie muss x gewählt werden, damit E(x|-8) auf der Geraden liegt ?

Lösung:

a) g: $X = A + t\cdot\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$

g: $X = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$

b) Wir setzen C für X ein:

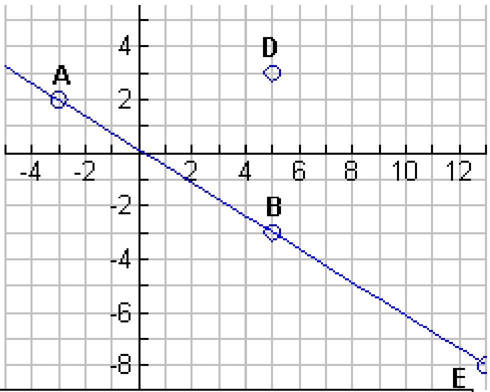
$$\begin{pmatrix}-19\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$$

und spalten die Gleichung waagrecht in 2 Zeilen:

$$\left\{\begin{aligned} -19 &= -3 + 8t \\ 12 &= 2 - 5t \end{aligned}\right.$$

und lösen die beiden Gleichungen in t auf:
-19 = -3 +8t → -16 = 8t → -2 = t
12 = 2 – 5t → 10 = -5t → -2 = t
da die beiden Lösungen für t gleich sind, liegt C auf g.
Dasselbe machen wir für D:

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$$



c) Wir ersetzen X in der Geradengleichung durch E:

$$\begin{pmatrix}x\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$$

spalten in zwei Zeilen:
x = –3 + 8t
–8 = 2 – 5t → **t = 2**
dies eingesetzt in die erste Zeile:
x = –3 + 8·2 = 13 → **E(13|–8)**

$$\left\{\begin{array}{l} 5 = -3 + 8t \\ 3 = 2 - 5t \end{array}\right\}$$

und lösen die beiden Gleichungen in t auf:

$5 = -3 + 8t \;\rightarrow\; 8 = 8t \;\rightarrow\; 1 = t$

$3 = 2 - 5t \;\rightarrow\; 1 = -5t \;\rightarrow\; -1/5 = t$

da die beiden Lösungen für t **nicht** gleich sind,
liegt D **nicht** auf g.

Beispiel 2:

a) Erstellen Sie eine parallele Gerade h_1 zu g: $X=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$ durch Q(1|4)

b) Erstellen Sie eine normale Gerade h_2 zu g durch Q

Lösung:

a) Eine **parallele** Gerade hat den gleichen Richtungsvektor wie g, der Startpunkt ist allerdings anders:

$$h_1:\quad X=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$$

b) Eine **normale** Gerade hat den gekippten Vektor als Richtungsvektor: $\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}^L=\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$

$$h_2:\quad X=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$$

<u>Geraden schneiden – das ergibt einen Schnittpunkt:</u>

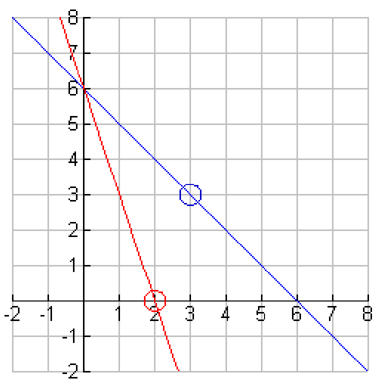
Beispiel:

Welchen Schnittpunkt erzeugen die Geraden g: $X=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ mit h: $X=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$?

Lösung:

Wenn der gemeinsame Schnittpunkt X von beiden Geraden gesucht wird, muss X=X gelten und daher kann man die rechten Seiten der Geradengleichungen gleich setzen:

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$



Nun kommt der Hammer  und hackt das in zwei Zeilen:

$$\left\{\begin{array}{l} 3 + 3t = 2 + 1s \\ 3 - 3t = 0 - 3s \end{array}\right\}$$

und wir haben Glück, durch einfache Addition der Gleichungen verschwindet der Parameter t:

$6 = 2 - 2s \;\rightarrow\; 4 = -2s \;\rightarrow\; -2 = s$

Und dann setzen wir s dort ein, wo es vorkommt:

$$X=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$$

Damit haben wir den Schnittpunkt S(0|6) erhalten !!!

Höhenschnittpunkt – Umkreismittelpunkt – Schwerpunkt beim Dreieck

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2|-2) B(7|3) C(-2|6)
Zeichnen und berechnen Sie den Höhenschnittpunkt

Lösung:
Als **erstes** brauchen wir die Höhe auf die Seite AB, die durch den Eckpunkt C geht und rechtwinkelig zu AB verläuft. Somit müsste die Parameterdarstellung lauten: h_{AB}: $X = C + t\cdot \overrightarrow{AB}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

dann kippen wir den Vektor nach links: $\overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

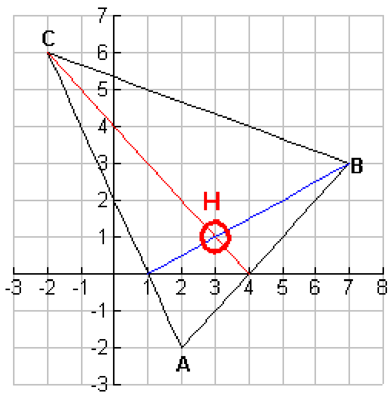
und setzen ein in die Formel: h_{AB}: $X = C + t\cdot \overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

Als **zweites** brauchen wir die Höhe auf die Seite BC, die durch den Eckpunkt A geht und rechtwinkelig zu BC verläuft: h_{BC}: $X = A + s\cdot \overrightarrow{BC}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$

dann kippen wir den Vektor nach links: $\overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

und setzen ein in die Formel: h_{BC}: $X = A + s\cdot \overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$



Und der **dritte** Streich ist das Schneiden der beiden Höhen:

$h_{AB} \cap h_{BC}$: $\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

Nun kommt der Hammer und hackt das in zwei Zeilen:

$-2 - 5t = 2 - 3s$
$\underline{6 + 5t = -2 - 9s}$

addiert ergibt sich: $4 = 0 - 12s \rightarrow s = 4/-12 = -1/3$

und nun *setzen wir s dort ein, wo es vorkommt* (!!):

X =

$$\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + (-1/3)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/3\cdot(-3)\\-1/3\cdot(-9)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}+1\\+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Damit ist unser **Höhenschnittpunkt**: **H(3|1)**

Der Umkreismittelpunkt wird so ähnlich ermittelt. Die **Streckensymmetralen** sind auch senkrecht auf die Seiten, gehen aber durch den **Seitenmittelpunkt**: $M_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$

Beispiel:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2|-2) B(7|3) C(-2|6)
Zeichnen und berechnen Sie den Umkreismittelpunkt

Lösung:

Als **erstes** brauchen wir die Seitensymmetrale auf die Seite AB, die durch den Punkt M_{AB} geht und rechtwinkelig zu AB verläuft. Somit müsste die Parameterdarstellung lauten: s_{AB}: $X = M_{AB} + t \cdot \overrightarrow{AB}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ und kippen wir den Vektor: $\overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

dann berechnen wir den Mittelpunkt der Seite AB: $\boxed{MAB = \frac{A+B}{2} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}}$

und setzen ein in die Formel: s_{AB}: $X = M_{AB} + t \cdot \overrightarrow{AB}^L = \begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

Als **zweites** brauchen wir die Seitensymmetrale auf die Seite BC, die durch den Punkt M_{BC} geht und rechtwinkelig zu BC verläuft. s_{BC}: $X = M_{BC} + s \cdot \overrightarrow{BC}^L$

Wir berechnen zuerst $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$ und kippen wir den Vektor: $\overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

dann berechnen wir den Mittelpunkt der Seite AB: $\boxed{M_{BC} = \frac{B+C}{2} = \frac{\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}}$

und setzen ein in die Formel: s_{BC}: $X = M_{BC} + s \cdot \overrightarrow{BC}^L = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

Und der **dritte** Streich ist das Schneiden der beiden Seitensymmetralen:

$s_{AB} \cap s_{BC}$: $\begin{pmatrix}4{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix}$

Nun kommt der Hammer und hackt das in zwei Zeilen:

$4{,}5 - 5t = 2{,}5 - 3s$

$\underline{0{,}5 + 5t = 4{,}5 - 9s}$

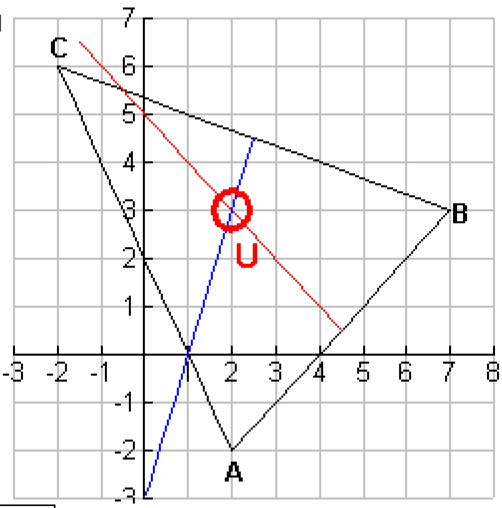
addiert ergibt sich: $5 \quad = 7 - 12s \rightarrow s = -2/-12 = 1/6$

und nun *setzen wir s dort ein, wo es vorkommt* (!!):

$X = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + (1/6) \cdot \begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/6 \cdot (-3)\\1/6 \cdot (-9)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\4{,}5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Damit ist unser **Umkreismittelpunkt**: **U(2|3)**



Zum Abschluss der **Schwerpunkt**, der diesmal ganz leicht ist:

$$\boxed{S = \frac{A+B+C}{3} = \frac{\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix}7/3\\7/3\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}2{,}3\\2{,}3\end{pmatrix}}$$

EULER'sche Gerade: Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt liegen auf einer Geraden und der Schwerpunkt drittelt die Strecke HU.