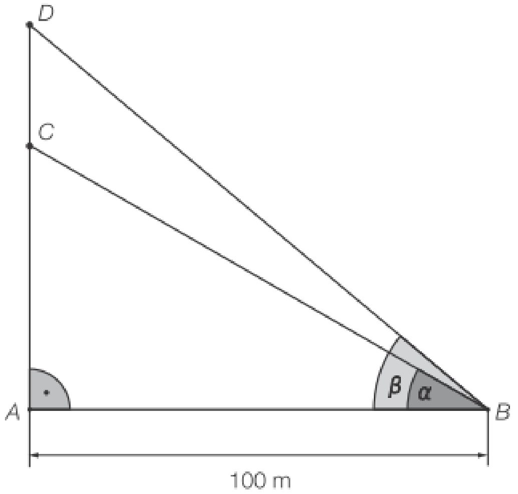
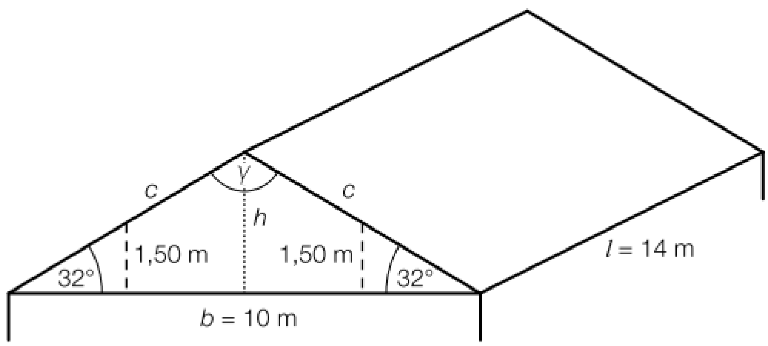
Trigonometrie–Beispiele

1) Ein von einem Punkt A senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt B am Flussufer unter dem Höhenwinkel α = 30° gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel β = 40° (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge CD

2) Laut Tiroler Wohnbauförderungs-Richtlinien zählt zu einer förderbaren Nutzfläche nur diejenige Fläche, bei der die Raumhöhe mehr als 1,50 m beträgt. Für einen Dachgeschoß-Ausbau bei einem Haus mit einer Breite von b = 10 m und einer Länge von l = 14 m soll die förderbare Nutzfläche unter dem Satteldach berechnet werden.



– Berechnen Sie die förderbare Nutzfläche für diesen Dachgeschoß-Ausbau. (A, B)
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man den Giebelwinkel γ berechnen kann, wenn anstelle des Winkels mit 32° die maximale Raumhöhe h gegeben ist. (A)

3) Peter richtet in seinem Zimmer ein Heimkino ein.

a) Der Bildschirm seines Fernsehers hat ein Seitenverhältnis (Breite : Höhe) von 16 : 9 und eine Bildschirmhöhe von 57,28 cm.

– Berechnen Sie die Bildschirmbreite in Zentimetern.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale des Bildschirms in Zoll (1 Zoll = 2,54 cm).

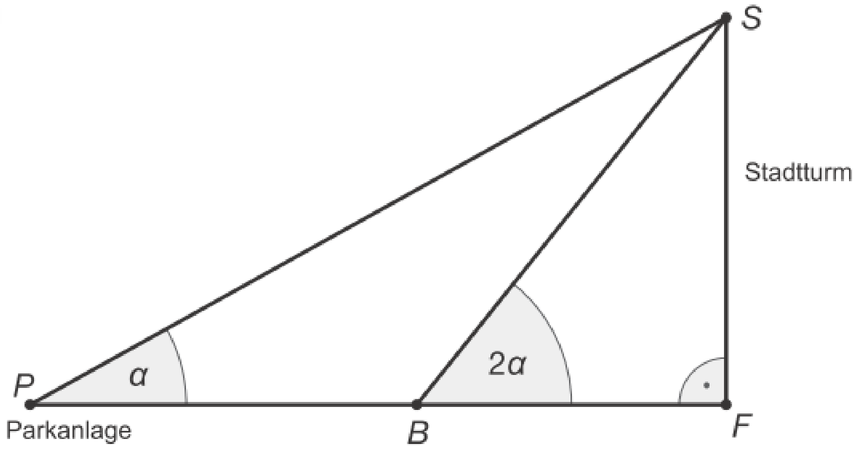
3) b) Der quadratische Boden von Peters Zimmer wird für das Heimkino mit einem schalldämmenden Teppich ausgelegt. Er misst die Diagonale d des Zimmerbodens.
Beim Verlegen des Teppichs ist ein Verschnitt von 15 % einzurechnen.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Fläche A des zu kaufenden Teppichs in Abhängigkeit von der Diagonale d auf.

c) Peter überlegt, wo er den Fernsehsessel positionieren soll, sodass die horizontale Entfernung x zum Fernseher optimal ist. Ideal ist es, in einem Winkel $\alpha = 5°$ auf die Bildschirmmitte hinaufzuschauen. Die Höhe vom Boden zur Bildschirmmitte ist h_1 und die Höhe vom Boden zu Peters Augen ist h_2.

– Erstellen Sie eine beschriftete Skizze, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der idealen Entfernung x auf.
– Beschreiben Sie, wie sich der Winkel α verändert, wenn man die Entfernung x zum Fernseher vergrößert.

4) a) Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38{,}2°$.



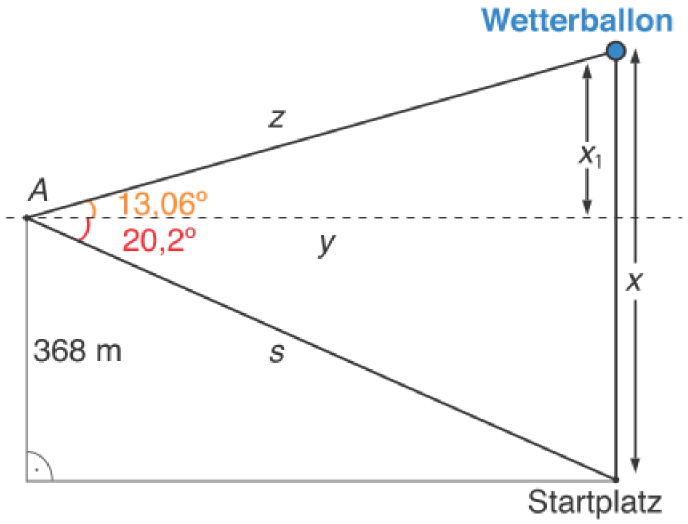
– Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke PF nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist (siehe oben stehende Skizze).

b) Der Stadtturm mit einer Höhe h wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge b, wobei b und h normal aufeinander stehen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels α, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf.

$\alpha =$ ____________________________

5)



a) – Interpretieren Sie die Grafik und finden Sie einen passenden Angabetext, aus dem diese Skizze entwickelt werden kann.

b) – Berechnen Sie die Flughöhe x des Ballons in Metern (m).

c) Der Ballon steigt vom Startplatz aus mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 2,3 Metern pro Sekunde (m/s) senkrecht nach oben.

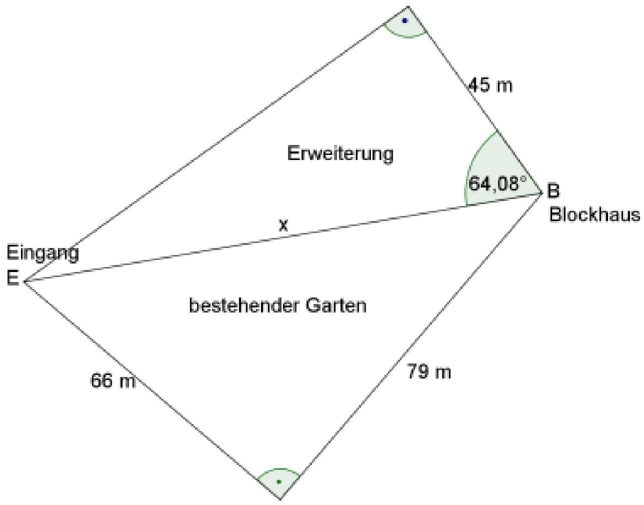
– Stellen Sie die Funktion, die die Höhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, grafisch dar.
– Lesen Sie die Höhe ab, die der Ballon nach einer halben Stunde erreicht.

6) Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.

Vom Eingang E zum Blockhaus B soll ein geradliniger Barfußweg angelegt werden (siehe nebenstehende Abbildung).

– Berechnen Sie die Länge x des Weges in Metern (m).

– Dokumentieren Sie, wie Sie den Flächeninhalt der Erweiterung berechnen können, wenn x als bekannt angenommen wird.

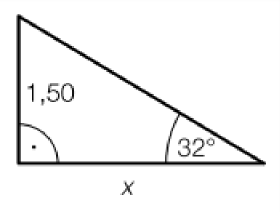


Lösungen:

1) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\boldsymbol{\beta}) - \tan(\boldsymbol{\alpha}))$

$\overline{CD} = 26{,}1\ldots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

2) a)



$\tan(32°) = \frac{1{,}50}{x}$

$x = \frac{1{,}50}{\tan(32°)} = 2{,}40\ldots \approx 2{,}4$

$A = (10 - 2 \cdot 2{,}4) \cdot 14 = 72{,}78\ldots \approx 72{,}8$

Die förderbare Nutzfläche beträgt 72,8 m².

2b) Berechnung des halben Giebelwinkels: $\frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} = \arctan\left(\frac{5}{h}\right)$

Der Giebelwinkel beträgt dann $\boldsymbol{\gamma} = 2 \cdot \frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{h}\right)$.

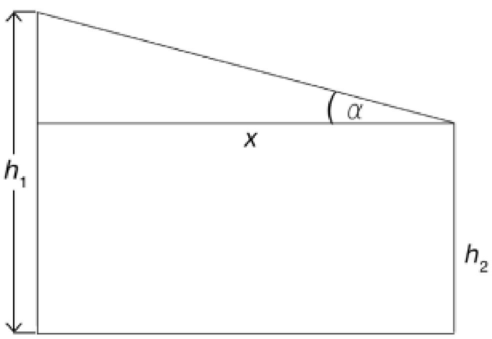
3) a) $\frac{16}{9} = \frac{l}{57{,}28}$

$l = 101{,}83$ cm

$d = \sqrt{57{,}28^2 + 101{,}83^2} = 116{,}83 \text{ cm} \approx 46 \text{ Zoll}$

b) $A(d) = 1{,}15 \cdot \frac{d^2}{2}$

c)



$x = \frac{h_1 - h_2}{\tan(5°)}$

Wenn sich die Entfernung x zum Fernseher vergrößert, wird der Winkel α kleiner.

4) a) $\frac{51}{\tan(\alpha)} - \frac{51}{\tan(2\alpha)} = 52{,}471... \approx 52{,}47$

Man muss sich um rund 52,47 m annähern.

b) Der Höhenwinkel α ($0° < \alpha < 90°$) kann bestimmt werden durch:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$$

5) a) Ein Ballon schwebt über dem Erdboden. Eine Messstation befindet sich auf einem Berghang i einer Position 368 m über der Ebene, auf der der Startplatz liegt. Von dort visiert man den Mittelpunkt eines Wetterballons unter dem Höhenwinkel $\alpha = 13{,}06°$ und den Startplatz senkrecht unter dem Ballon unter dem Tiefenwinkel $\beta = 20{,}2°$ an.
Aus diesen Messwerten soll die Flughöhe des Ballons bestimmt werden.
(Die Aufgabe ist offen, es ist auch ein anderer Text möglich, der zur Skizze passt.)

b) $y = \frac{368}{\tan(20{,}2)}$

$y = 1\,000{,}20$

$x_2 = 1\,000{,}2 \cdot \tan(13{,}06)$
$x_2 = 232{,}02$

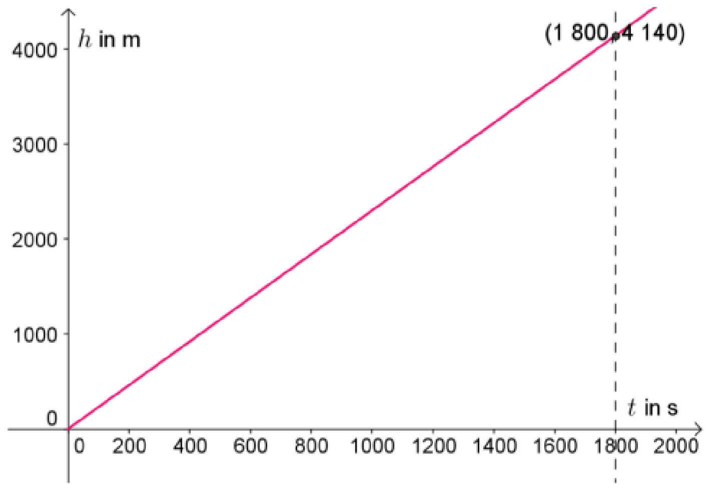
$368 + 232{,}02 \approx 600$

Die im Augenblick der Messung vorliegende Höhe h des Ballons beträgt ungefähr 600 m.

Die Aufgabe kann auf anderen Wegen, z. B. mit Sätzen des allgemeinen Dreiecks, berechnet werden, auch wenn Letztere nicht im Kompetenzkatalog für Teil A enthalten sind.

c) $s = v \cdot t = 2{,}3t$ s in m, t in s

Einschätzung der Definitionsmenge: Man braucht 30 Minuten = 1 800 s.



Ablesung: Nach einer halben Stunde hat der Ballon eine Höhe von ungefähr 4 100 m erreicht (berechneter Wert: 4 140 m).

6) $x = \sqrt{66^2 + 79^2} = 102{,}9\ldots$

Der Weg ist rund 103 m lang.

Um die Fläche zu berechnen, benötigt man die Höhe im rechtwinkeligen Dreieck der Erweiterung.
Die Höhe steht normal auf x, daher gilt: $h = 45 \cdot \sin(64{,}08°)$.
Den Flächeninhalt erhält man demnach mit $x \cdot \frac{h}{2}$.