Übungen zum Differenzenquotient = mittlere Änderungsrate/Wachstumsrate

1) In den folgenden **Tabellen** ist der Zusammenhang zwischen der Zeit (x) und der Wachstumsgröße (y) gegeben. Berechnen Sie die absoluten Differenzen zweier Folgedaten und damit die Wachstumsrate (Differenzenquotient).
Geben Sie an, ob es ein linearer Zusammenhang ist.

a)

x	y	Diff	Diff.quot
1	17		
2	21		
3	25		
4	29		
5	35		

b)

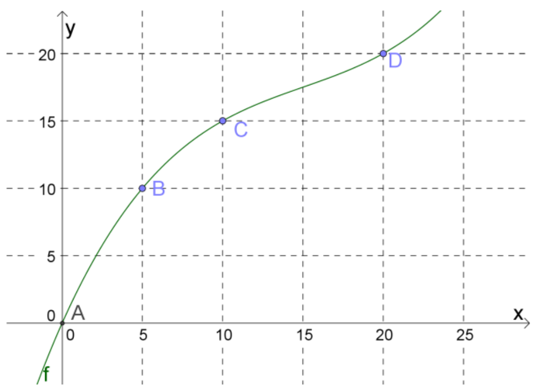
x	y	Diff	Diff.quot
12	37		
17	38,5		
24	40		

c)

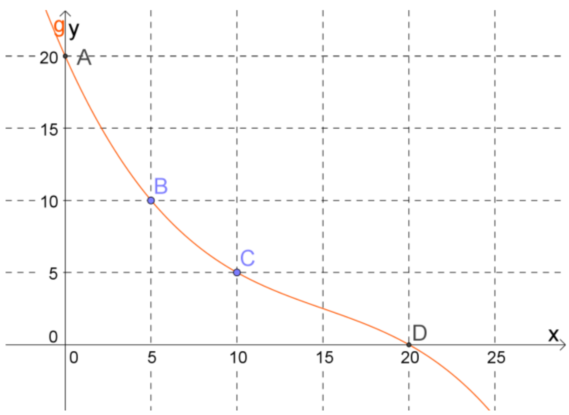
x	y	Diff	Diff.quot
7	201		
9	225		
20	357		

2) Berechnen Sie aus den folgenden **Grafiken** die mittlere Änderungsrate zwischen [5;10] und [10;20]. Was bedeutet das Vorzeichen? Wie hängt das mit der Steigung zusammen?

a)



b)



3) Gegeben ist eine Funktion. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion im Intervall [1;3] und [3;4]. Machen Sie eine Skizze der Funktion im Intervall [0;4]
a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = 5x^2$ c) $f(x) = -x^2 + 5x$ d) $f(x) = 2^x$ e) $1 - 0{,}5^x$

4) Eine Produktion von Batterien kostet bei 1000 Stück 25 000€, bei 2500 Stück 44 500€ und bei 8500 Stück 122 500€. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von [1000; 2500] Stück und von [2500; 8500] Stück. Geben Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate **in diesem Sachzusammenhang** an. Was bedeutet eine konstante Änderungsrate?

5) wie 4) mit: 100 Stück kosten 5300€, 250 Stück kosten 6500€ und 850 Stück kosten 9600€

6) Der freie Fall einer schweren Kugel erfolgt nach der Formel $s(t) = 5 \cdot t^2$ [t in Sekunden, s in Meter]. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Kugel im Intervall [0;3] und [2;3]. Warum ist der 2.Wert größer als der erste?

7) Eine Autofahrt erfolgt nach der Wegstrecken−Funktion s(t) [t in Sekunden, s in Meter]. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit im Intervall [0;10] und [9;10]. Was bedeutet es, wenn beide Werte gleich sind, kleiner oder größer werden?
a) $s(t) = 20+10t$ b) $s(t) = 20t-0{,}5t^2$ c) $s(t) = 100-5t$ d) $s(t) = 30t + 0{,}1t^2$
Veranschaulichen Sie sich auch die Kurven im Taschenrechner

Lösungen:

1)

a)

x	y	Diff	Diff.quot
1	17		
		4	4
2	21		
		4	4
3	25		
		4	4
4	29		
		6	6
5	35	nicht	linear

b)

x	y	Diff	Diff.quot
12	37		
		1,5	0,3
17	38,5		
		1,5	0,21
24	40		
		nicht	linear

c)

x	y	Diff	Diff.quot
7	201		
		24	12
9	225		
		132	12
20	357		
			linear

2) a) MÄR[5;10] = $\frac{15-10}{10-5} = 1$ MÄR[10;20] = $\frac{20-15}{20-10} = 0{,}5$

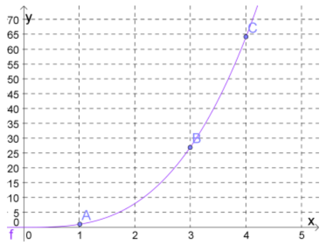
Die 2.Steigung ist halb so groß und positiv, daher weniger steil werdend.

b) MÄR[5;10] = $\frac{5-10}{10-5} = -1$ MÄR[10;20] = $\frac{0-5}{20-10} = -0{,}5$

Die 2.Steigung ist halb so groß und negativ, daher schwächer fallend

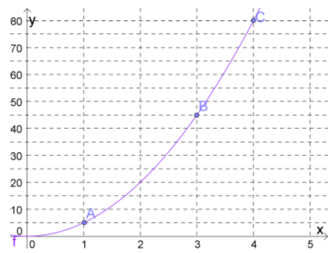
3a) MÄR[1;3] = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^3-1^3}{3-1} = 13$

MÄR[3;4] = $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{4^3-3^3}{4-3} = 37$



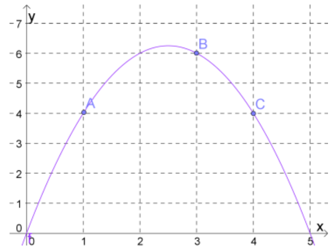
3b) MÄR[1;3] = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{5\cdot 3^2-5\cdot 1^2}{3-1} = 20$

MÄR[3;4] = $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{5\cdot 4^2-5\cdot 3^2}{4-3} = 35$



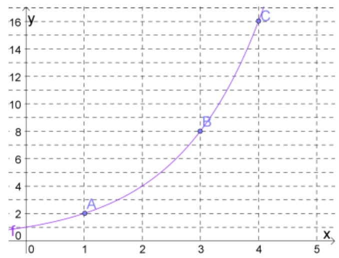
3c) MÄR[1;3] = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3^2+5\cdot 3-(-1^2+5\cdot 1)}{3-1} = 1$

MÄR[3;4] = $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{-4^2+5\cdot 4-(-3^2+5\cdot 3)}{4-3} = -2$



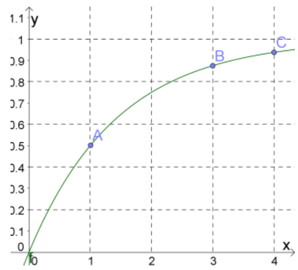
3d) MÄR[1;3] = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{2^3-2}{3-1} = 3$

MÄR[3;4] = $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{2^4-2^3}{4-3} = 8$



3e) MÄR[1;3] = $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{1-0{,}5^3-(1-0{,}5)}{3-1} = 0{,}1875$

MÄR[3;4] = $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{1-0{,}5^4-(1-0{,}5^3)}{4-3} = 0{,}0625$



4) MÄR[1000;2500]=$\frac{44500-25000}{2500-1000} = 13$ MÄR[2500;8500]= $\frac{122500-44500}{8500-2500} = 13$

Die mittlere Änderungsrate ist ausgedrückt in €/Stück und bedeutet den Materialpreis pro Stück beim Einkauf. Eine konstante Änderungsrate bedeutet, dass der Materialpreis unabhängig von der eingekauften Stückzahl ist.

5) MÄR[100;250]=$\frac{6500-5300}{250-100} = 8$ MÄR[250;850]= $\frac{9600-6500}{850-250} = 5{,}17$

Die mittlere Änderungsrate ist ausgedrückt in €/Stück und bedeutet den Materialpreis pro Stück beim Einkauf. Eine fallende Änderungsrate bedeutet, dass der Materialpreis bei steigender Stückzahl billiger wird (z.B. Großhandelspreis)

6) v[0;3] = $\frac{s(3)-s(0)}{3-0} = \frac{45-0}{3-0} = 15\ m/s$ v[2;3] = $\frac{s(3)-s(2)}{3-2} = \frac{45-20}{3-2} = 25\ m/s$

Der 2. Wert ist größer als der erste, weil die Kugel schneller wird

7a) v[0;10]=$\frac{s(10)-s(0)}{10-0} = \frac{120-20}{10-0} = 10\ m/s$ v[9;10]=$\frac{s(10)-s(9)}{10-9} = \frac{120-110}{10-9} = 10\ m/s$ ➔ konstante Geschw.

7b) v[0;10]=$\frac{s(10)-s(0)}{10-0} = \frac{150-0}{10-0} = 15\ m/s$ v[9;10]=$\frac{s(10)-s(9)}{10-9} = \frac{150-139{,}5}{10-9} = 10{,}5 m/s$ ➔ langsamer werdend

7c) v[0;10]=$\frac{s(10)-s(0)}{10-0} = \frac{50-100}{10-0} = -5\ m/s$ v[9;10]=$\frac{s(10)-s(9)}{10-9} = \frac{50-55}{10-9} = -5\ m/s$ ➔ konstante neg. Geschw.

7d) v[0;10]=$\frac{s(10)-s(0)}{10-0} = \frac{310-0}{10-0} = 31\ m/s$ v[9;10]=$\frac{s(10)-s(9)}{10-9} = \frac{310-278{,}1}{10-9} = 31{,}9\ m/s$ ➔ schneller werdend