

## Folgen und Reihen

- 1) Ermittle die ersten fünf Glieder der folgenden rekursiv bzw. explizit definierten Zahlenfolgen:
  - a)  $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 2$
  - b)  $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n \cdot 2$
  - c)  $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n \cdot 3 - 13$
  - d)  $a_1 = 625, a_{n+1} = a_n \cdot 0,2 + 10$
  - e)  $a_1 = 100, a_{n+1} = a_n \cdot 1,05 + 100$  (5\* jedes Jahr 100€ Einzahlung und 5% Zinsen!)
  - f)  $a_n = 5n - 3$
  - g)  $a_n = (-1)^n \cdot n$
  - h)  $a_n = (3n+1)/(2n)$
  - i)  $a_n = n^2 - 6n$
- 2) Bestimme für die arithmetische Folge  $a_5$  und  $a_{50}$ .
  - a)  $a_1 = 3, k = 2$
  - b)  $a_1 = 80, k = -3$
  - c)  $a_4 = 4, a_6 = 11$
  - d)  $a_8 = 100, a_{12} = 200$
- 3) Untersuche, ob die angegebenen Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge angehören können (z.B.: durch 2malige Bestimmung von  $k = \frac{a_n - a_m}{n - m}$ )
  - a)  $a_1 = 1,1; a_4 = 1,4; a_5 = 1,6$
  - b)  $a_2 = 3; a_5 = 1; a_{11} = -3$
- 4) Bei einem Wettbewerb werden 10 Preise vergeben. Der 1. Preis beträgt 1500 €, jeder weitere Preisträger erhält um 100 € weniger als der vorige.
  - a) Wie hoch ist der 10. Preis?
  - b) Berechne die Summe aller Preise.
- 5) Eine Maschine hat einen Neuwert von 60000 €. Nach 5 Jahren beträgt der Wert bei linearer Abschreibung (d.h. jedes Jahr wird derselbe Betrag abgeschrieben) nur noch 35000 €.
  - a) Gib den Wert nach 1, 2, 3, 4 Jahren an. (Tipp: Bezeichne den Neuwert mit  $a_0$ .)
  - b) Nach wieviel Jahren ist die Maschine ganz abgeschrieben?
- 6) Ein Sportler bereitet sich auf einen Marathonlauf vor. Am ersten Tag läuft er 5000 m. Er hat vor, drei Wochen lang seine Leistung täglich um 500 m zu steigern.
  - a) Wie weit läuft er am 21. Tag?
  - b) Welche Strecke legt er in den drei Wochen insgesamt zurück?
- 7) Berechne die Summe der ersten (1) 32, (2) 100 Glieder:
  - a)  $\langle 4; 8; 12; 16; \dots \rangle$
  - b)  $\langle -8; -5; -2; \dots \rangle$
  - c)  $\langle 0,5; 1,5; 2,5; \dots \rangle$
- 8) Von einer arithmetischen Folge sind gegeben:  $a_3 = 27, a_7 = 71$ . Berechne für die zugehörige arithmetische Reihe a)  $s_{10}$ , b)  $s_{31}$ , c)  $s_{125}$ .
- 9) Berechne die ersten 5 Glieder der geometrischen Folge mit:
  - a)  $b_1 = 3, q = 2$
  - b)  $b_1 = 1,2, q = 0,5$
  - c)  $b_1 = -0,3, q = 1,5$
- 10) Berechne die ersten acht Glieder der endlichen geometrischen Folge:
  - a)  $b_3 = 2, b_5 = 8$
  - b)  $b_2 = 2, b_5 = -16$
  - c)  $b_3 = \frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{32}$
- 11) Von einer geometrischen Reihe kennt man  $b_3 = 18$  und  $b_6 = 60,75$ .  
Berechne: a)  $s_5$ , b)  $s_8$ , c)  $s_{11}$ .

12) Von einer geometrischen Reihe kennt man  $b_2 = \frac{2}{7}$  und  $b_5 = \frac{2}{189}$ .

Berechne: a)  $s_4$ , b)  $s_7$ , c)  $s_{12}$ .

13) Wenn man 5000 Euro (=  $b_0$ ) auf die Bank legt und 6 Jahre zu 0,8% Zinsen anlegt,

a) welchen Kontostand hat man nach 6 Jahren? (=  $b_6$ )

b) Wenn man jährlich regelmäßig am Ende des Jahres 5000 Euro auf das Konto legt, wie viel ergibt das in Summe nach 6 Jahren incl. Zinseszinsen (=  $s_6$ )?

14) Ein Betrag von € 4840 soll so auf 5 Personen aufgeteilt werden, dass die erste einen Teil und jede folgende dreimal so viel erhält wie die vorhergehende.

Wie viel bekommt jede Person?

15) Auf das erste Feld eines **Schachspieles** werde ein Weizenkorn gelegt, auf das zweite zwei, auf das dritte vier, usw.

a) Angenommen, man möchte dieses „Verdoppelungsspiel“ bis zum Ende aller Felder eines Schachspieles fortsetzen, wie viele Weizenkörner würde man benötigen?

b) Wie viel t Weizen ergäbe dieses „Spiel“, wenn ein Weizenkorn durchschnittlich 50 mg wiegt?

c) Wie viel Weizen etwa käme auf eine Person, wenn die Weltbevölkerung mit rund 7 Milliarden angesetzt wird?

16) Ein Kind baut einen **Turm** aus 8 Plastikwürfeln. Die Seitenlänge des 1. Würfels beträgt 12 cm, jeder weitere hat die 0,8-fache Seitenlänge des vorigen.

a) Welche Seitenlänge hat der 8. Würfel?

b) Welches Volumen hat der 1. bzw. 8. Würfel?

c) Wie hoch ist der Turm?

d) Berechne die Summe der Volumina aller 8 Würfel!

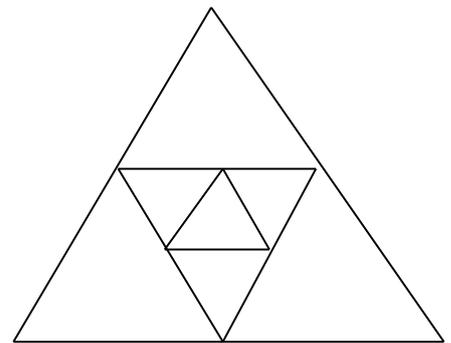
17) Ein gleichseitiges **Dreieck** mit der Seitenlänge 10 cm enthält ein Dreieck mit halber Seitenlänge, das verkehrt eingeschrieben ist, usw.

a) Wie groß ist die Seitenlänge des 15. Dreiecks?

b) Wie groß ist die Summe der ersten 15 Flächeninhalte der Dreiecke?

c) Legt man alle Dreiecke Ecke an Ecke nebeneinander: Wie lang ist die Weg, den man gehen muss, wenn man an der linken unteren Ecke beginnt und bis zur rechten 15. Dreiecksecke geht?

d) Wie groß ist die Summe aller (unendlich vielen) Seiten der Dreiecke?

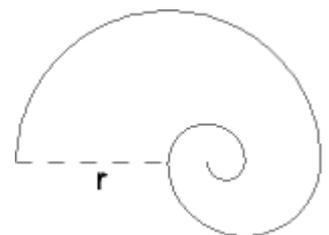


18) An einen **Halbkreis** mit dem Radius  $r=5\text{cm}$  wird ein halb so großer Halbkreis angefügt, daran wieder ein halb so großer usw., so dass eine Spirale entsteht (Bild).

a) Wie lang ist die Summe von 8 Halbkreisumfängen?

b) Berechne den Grenzwert der Länge der Spirale.

c) Wie weit ist das Zentrum der unendlichen Spirale von ihrem Anfangspunkt entfernt?



19) Berechne die unendlichen Summen der folgenden unendlichen geometrischen Reihen:

a)  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$

b)  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \dots$

c)  $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$

d)  $1 + 0,4 + 0,16 + \dots$

20) Ermittle die ersten sechs Glieder der Folge, die durch das angegebene Bildungsgesetz festgelegt wird.

a)  $\left\langle \frac{3n-1}{n+4} \right\rangle$

b)  $\left\langle \frac{3n+2}{n+5} \right\rangle$

c)  $\left\langle \frac{2^{n-1}}{n} \right\rangle$

d)  $\left\langle \frac{2^{n+1}}{n^2} \right\rangle$

21) Stelle eine Vermutung über die Monotonie der Folge auf und beweise diese:

a)  $\left\langle \frac{3n-1}{2n} \right\rangle$

b)  $\left\langle \frac{n}{2n+1} \right\rangle$

c)  $\left\langle \frac{2n+1}{n} \right\rangle$

d)  $\left\langle \frac{1-2n}{n} \right\rangle$

22) Bestimme den Grenzwert  $a$  der nachstehenden Folgen und gib zu den angegebenen  $\varepsilon$ -Werten den Index  $n$ , von dem an  $|a_n - a| < \varepsilon$  gilt.

a)  $\left\langle \frac{3-6n}{12+8n} \right\rangle, \varepsilon = 0,05$

b)  $\left\langle \frac{2n}{2n+5} \right\rangle, \varepsilon = 0,001$

c)  $\left\langle \frac{8n+1}{6n-3} \right\rangle, \varepsilon = 0,01$

d)  $\left\langle \frac{10-3n}{4n+1} \right\rangle, \varepsilon = 0,005$

23) Ermittle obere und untere Schranken für die Folgen (mit Beweis):

a)  $\left\langle \frac{5n+1}{3n-2} \right\rangle$

b)  $\left\langle \frac{4n-1}{1-2n} \right\rangle$

24) Untersuche, ob die angegebenen Zahlen obere Schranken der betreffenden Folge sind (mit Beweis!):

a)  $1, \frac{7}{4}; \left\langle \frac{6n-2}{4n+1} \right\rangle$

b)  $2, \frac{3}{2}; \left\langle \frac{2n}{2n+51} \right\rangle$

25) Untersuche, ob die angegebenen Zahlen untere Schranken der betreffenden Folge sind (mit Beweis!):

a)  $\frac{3}{2}, 1; \left\langle \frac{8n+1}{6n-3} \right\rangle$

b)  $1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}; \left\langle \frac{3n}{3n-2} \right\rangle$

26) Eine Mitarbeiterin der Firma verdient jährlich 10 000 Euro. Sie kann sich für folgende Gehaltsvarianten entscheiden:

a) sie bekommt jährlich um 700 € mehr Gehalt

b) sie bekommt jährlich um 5% mehr Gehalt

c) sie bekommt das Gehalt nach der Formel:  $\frac{10000+2000 \cdot n}{1+0,1 \cdot n}$  (n...Jahre)

i) Wie viel verdient sie in den drei Varianten in den ersten 5 Jahren (mit  $n=0$  zu zählen beginnen!)?

ii) Wie viel verdient sie nach 10 Jahren, nach 30 Jahren und nach 100 Jahren?

iii) Welche Art der Folge ist das jeweils (monoton, arithmetisch, geometrisch) ?

**Lösungen:**

- 1a) <5; 7; 9; 11; 13>    1b) <3; 6; 12; 24; 48>    1c) <7; 8; 11; 20; 47>    1d) <625; 135; 37; 17,4; 13,48>  
 1e) <100; 205; 315,25; 431,01; 552,56>    1f) <2; 7; 12; 17; 21>    1g) <-1; 2; -3; 4; -5>  
 1h) <4/2; 7/4; 10/6; 13/8; 16/10>    1i) <-5; -8; -9; -8; -5>  
 2)a)  $a_5 = 11, a_{50} = 101$     2)b)  $a_5 = 68, a_{50} = -67$     2)c)  $a_5 = 7,5, a_{50} = 165$   
 2d)  $a_5 = 25, a_{50} = 1150$   
 3a) nein ( $k = 0,3$  oder  $0,2$ )    3b) ja ( $k = -2/3$ )  
 4a) 600    4b) 10500  
 5a) <55000; 50000; 45000; 40000; ...>    5b) nach 12 Jahren  
 6a) 15 km    6b) 210 km  
 7a) 2112, 20200    7b) 1232, 14050    7c) 512, 5000  
 8a) 545    8b) 5270    8c) 85875  
 9a) <3; 6; 12; 24; 48>    b) <1,2; 0,6; 0,3; 0,15; 0,075>    c) <-0,3; -0,45; -0,675; -1,0125; -1,51875>  
 10a) <1/2, ±1, 2, ±4, 8, ±16, 32, ±64>    (2 Lösungen!)    10b) <-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128>  
 10c) <8, ±2, 1/2, ±1/8, 1/32, ±1/128, 1/512, ±1/2048>    (2 Lösungen!)  
 11a) 105,5    b) 394,0625    c) 1367,96...  
 12a) 1,2698    b) 1,2851    c) 1,2857  
 13a) 5244,85 €    b) 30606,44 €  
 14) Ansatz :  $s_5 = 4840 = b_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1}$  und  $q = 3 \rightarrow b_1 = 40 \rightarrow <€ 40, € 120, \dots, € 3240>$   
 15a)  $2^{64} - 1 \approx 1,84467 \cdot 10^{19}$  Körner    b)  $9,22 \cdot 10^{11}$  Tonnen    c) 131,7 Tonnen/Mensch  
 16) a) 2,52 cm    b)  $1728 \text{ cm}^3, 15,94 \text{ cm}^3$     c) 49,93 cm    d)  $3524,26 \text{ cm}^3$   
 17) a) 0,00061 cm    b)  $57,735 \text{ cm}^2$     c) 19,9996948 cm    d) 20 cm  
 18a) 31,29 cm    b) 31,41 cm    c) 6,67 cm  
 19a) 3    b)  $\frac{4}{5}$     c)  $2(2 + \sqrt{2}) = 6,828\dots$     d)  $\frac{5}{3}$   
 20a)  $\left\langle \frac{2}{5}; \frac{5}{6}; \frac{8}{7}; \frac{11}{8}; \frac{14}{9}; \frac{17}{10}; \dots \right\rangle$     b)  $\left\langle \frac{5}{6}; \frac{8}{7}; \frac{11}{8}; \frac{14}{9}; \frac{17}{10}; \frac{20}{11}; \dots \right\rangle$     c)  $\left\langle 1; 1\frac{4}{3}; 2; \frac{16}{5}; \frac{16}{3}; \dots \right\rangle$   
 20d)  $\left\langle 4; 2; \frac{16}{9}; \frac{32}{16}; \frac{64}{25}; \frac{32}{9}; \dots \right\rangle$   
 21 a) wachsend    b) wachsend    c) fallend    d) fallend  
 22 a)  $-\frac{3}{4}; 29$     b) 1; 2498    c)  $\frac{4}{3}; 84$     d)  $-\frac{3}{4}; 538$   
 23a) 5/3, 6    b) -3, -2  
 24) a) nein, ja    b) beide ja  
 25) a) nein, ja    b) beide nein  
 26) a) <10000, 10700, 11400, 12100, 12800, 13500, ..., 17000, ..., 31000, ..., 80000>  
 b) <10500, 11025, 11576, 12155, 12763, 13401, ..., 16289, ..., 43219, ..., 1.315.013>  
 c) <10000, 10909, 11667, 12308, 12857, 13333, ..., 15000, ..., 17500, ..., 19091>  
 a) ist arithmetisch,    b) ist geometrisch,    c) ist monoton gegen den Grenzwert 20000€

