Gleichungen 3. und höheren Grades (GUT/Gurtner)

1. Eine Gleichung der Form $x^3 = a$ hat immer genau eine Lösung, und zwar
   $x = \sqrt[3]{a}$ (hat dasselbe Vorzeichen wie a)
   Beispiel: $x^3 = 125 \Rightarrow x = 5$
   $x^3 = -125 \Rightarrow x = -5$
2. Wenn man **x herausheben** kann, zerfällt die Gleichung in eine lineare und eine quadratische Gleichung
   Beispiel: $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
   $x(x^2 - 5x + 6) = 0$
   $x = 0$ oder $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$
3. Im allgemeinen Fall muss man eine Lösung x_1 durch **Probieren** finden (z.B. Teiler des absoluten Glieds) und die linke Seite der Gleichung durch $(x – x_1)$ dividieren.
   Beispiel: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
   Mögliche (ganzzahlige) Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
   Durch Probieren findet man $x_1 = 2$
   $(x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$
   $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = -1, x_3 = 3$
   Mit dem **Horner-Schema** kann man das Probieren und die Division in einem Schritt zusammenfassen. Oder man bevorzugt das Polynomdivisionsverfahren. (siehe **nächste Seite**)
4. **Biquadratische** Gleichungen: Es kommen nur x^4 und x^2 vor.
   Wenn man $x^2 = t$ setzt, erhält man eine quadratische Gleichung.
   Beispiel: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
   $x^2 = t$:
   $t^2 - 10t + 9 = 0$
   $t_1 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$
   $t_2 = 9 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3$
   (Analog rechnet man, wenn z.B. nur x^6 und x^3 vorkommen.)

Das Horner-Schema (von: http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/horner.htm)

Mithilfe des Horner-Schemas *(William George Horner, 1786-1837)* können Polynomwerte berechnet und Polynome durch Linearfaktoren dividiert werden.

Beispiel: $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
Das kann man umformen zu $P(x) = x(x(x - 4) + 1) + 6$

Mithilfe der folgenden Tabelle kann man die Berechnung "automatisieren":
Wir schreiben die Koeffizienten in die oberste Zeile und die Zahl, die wir für x einsetzen wollen (z.B. x = 1), an den linken Rand:

	x^3	x^2	x	1
	1	-4	1	6
1				

Dann füllen wir die Tabelle folgendermaßen aus:

	1	-4	1	6
1	1	-3	-2	4

Erklärung:
1. Spalte: **1** (wird **von oben** abgeschrieben)
2. Spalte: $1 \cdot 1 - 4 =$ **-3**
3. Spalte: $1 \cdot (-3) + 1 =$ **-2**
4. Spalte: $1 \cdot (-2) + 6 =$ **4**

(Merkregel: "**nach links multiplizieren, nach oben addieren**")

Das heißt:
$P(1) = 4$ (letzte Spalte)
Gleichzeitig haben wir das Polynom durch $(x - 1)$ dividiert. Denn die Zahlen in der 1. - 3. Spalte sind die Koeffizienten des Polynoms, das wir bei der Division erhalten (die letzte Zahl gibt den Rest an). Wenn wir noch überlegen, dass der Grad des Polynoms bei der Division um 1 niedriger wird, können wir sofort anschreiben:
$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 1) = x^2 - 3x - 2$, Rest 4
Nun setzen wir z.B. $x = 2$:

	1	-4	1	6
1	1	-3	-2	4
2	1	-2	-3	0

1. Spalte: **1**
2. Spalte: $2 \cdot 1 - 4 = \mathbf{-2}$
3. Spalte: $2 \cdot (-2) + 1 = \mathbf{-3}$
4. Spalte: $2 \cdot (-3) + 6 = \mathbf{0}$

Also:
$P(2) = 0$ (2 ist Nullstelle des Polynoms)
$(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3$, Rest 0

Polynomdivision –Links:

http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/polynomdivision.htm
http://www.mathematik.de/mde/fragenantworten/erstehilfe/polynomdivision/polynomdivision.html
http://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision
http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/polydiv.htm
http://www.fell-mg.de/mathematik/javascript/polynomdivision/

Vergleich Polynomdivision und Hornerschema:

Polynomdivision:

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x-1) = 1x^2$
$-(x^3 - 1x^2)$
$\quad 0 + 1x^2$

Horner-Schema: **(rot: mal, grün: plus)**

x	x³	x²	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1			

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x-1) = 1x^2 + 1x$
$-(x^3 - 1x^2)$
$\quad 0 + 1x^2 - 7x$
$\qquad -(1x^2 - 1x)$
$\qquad\quad 0 \quad -6x$

x	x³	x²	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1		

$(x^3 \qquad - 7x + 6) : (x-1) = 1x^2 + 1x - 6$
$-(x^3 - 1x^2)$
$\quad 0 - 1x^2 - 7x$
$\qquad -(1x^2 - 1x)$
$\qquad\quad 0 \quad -6x \; +6$
$\qquad\qquad -(-6x + 6)$
$\qquad\qquad\quad 0 \quad 0$

x	x³	x²	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1	-6	

x	x³	x²	x	1
	1	**0**	**-7**	**6**
1	1	1	-6	0

1x² +1x –6

Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge R!

1a)	$x^3 = 64$	2a)	$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$
1b)	$x^3 = - 125$	2b)	$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
1c)	$8x^3 - 27 = 0$	2c)	$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$
1d)	$5x^3 + 2{,}56 = 0$	2d)	$x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$
1e)	$x^3 - 10x^2 + 16x = 0$	2e)	$x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = 0$
1f)	$x^3 + 9x^2 + 14x = 0$	2f)	$x^3 + x^2 -10x + 8 = 0$
1g)	$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$	2g)	$x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$
1h)	$x^3 + 4x^2 + 6x = 0$	2h)	$x^3 - 7x + 6 = 0$
1i)	$x^3 - 3x^2 = 0$	2i)	$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
1j)	$4x^3 + x^2 = 0$	2j)	$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$
1k)	$2x^3 + 9x^2 - 5x = 0$	2k)	$4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 0$
1l)	$5x^3 - 3x^2 + 2x = 0$	2l)	$5x^3 - 12x^2 + 5x - 2 = 0$
3a)	$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$	4a)	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
3b)	$x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36 = 0$	4b)	$x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
3c)	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 13x - 10 = 0$	4c)	$x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
3d)	$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$	4d)	$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
3e)	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 4 = 0$	4e)	$x^4 + 7x^2 + 12 = 0$
3f)	$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 18 = 0$	4f)	$x^4 + 2x^2 - 24 = 0$
3g)	$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$	4g)	$x^6 - 28x^3 + 27 = 0$
3h)	$x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$	4h)	$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Lösungen (Gleichungen 3. und höheren Grades):

1.
   a. {4}
   b. {-5}
   c. {3/2}
   d. {-0,8}
   e. {0, 2, 8}
   f. {-7, -2, 0}
   g. $\{0, 3^{(2)}\}$
   h. {0}
   i. $\{0^{(2)}, 3\}$
   j. $\{-1/4, 0^{(2)}\}$
   k. {-5, 0, 1/2}
   l. {0}

2.
   a. {-2, 1, 4}
   b. {-2, 2, 3}
   c. {-1, 3, 5}
   d. $\{-2^{(2)}, 5\}$
   e. {3}
   f. {-4, 1, 2}
   g. {-2}
   h. {-3, 1, 2}
   i. $\{-1, 2^{(2)}\}$
   j. {-1, 1/3, 3}
   k. $\{-1/4, 2^{(2)}\}$
   l. {2}

3.
   a. {1, 2, 3, 4}
   b. $\{-3, 2^{(2)}, 3\}$
   c. {-1, 2}
   d. $\{-2^{(2)}, 1^{(2)}\}$
   e. {-1, 1}
   f. {2, 3}
   g. {-4, -1, 2, 3}
   h. {-4, -2, -1, 2}

4.
   a. {1,-1, 2,-2}
   b. {2,-2, 4,-4}
   c. $\{ \sqrt{2}, -\sqrt{(2)}, \sqrt{(5)}, -\sqrt{(5)} \}$
   d. {3,-3}
   e. { }
   f. {2,-2}
   g. {1, 3}
   h. {-1, 2}