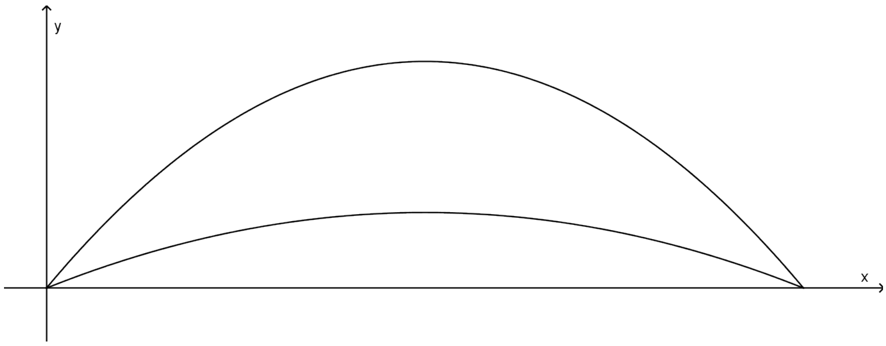
Berufsreifprüfung Mathematik

Volkshochschule Floridsdorf / Herbsttermin 2011

1. Ein Brückenbogen besteht aus zwei Parabeln zweiter Ordnung (siehe Skizze). Die Spannweite beträgt 54m. Die maximale Höhe des oberen Bogens beträgt 9m, jene des unteren Bogens 3m.



a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Parabeln. Legen Sie dazu den Ursprung des Koordinatensystems in den linken Schnittpunkt der beiden Parabeln. (5 P)

Zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{81}x^2 + \frac{2}{3}x, \quad g(x) = -\frac{1}{243}x^2 + \frac{2}{9}x$

b) Berechnen Sie die Steigung beider Kurven im linken Endpunkt und den Schnittwinkel zwischen den beiden Parabelbögen. (4 P)

c) Die Fläche zwischen den beiden Parabelbögen soll durch Blechplatten ausgekleidet werden. Welche Fläche an Blechplatten muss bestellt werden, wenn man mit 3% Verschnitt zu rechnen hat? (3 P)

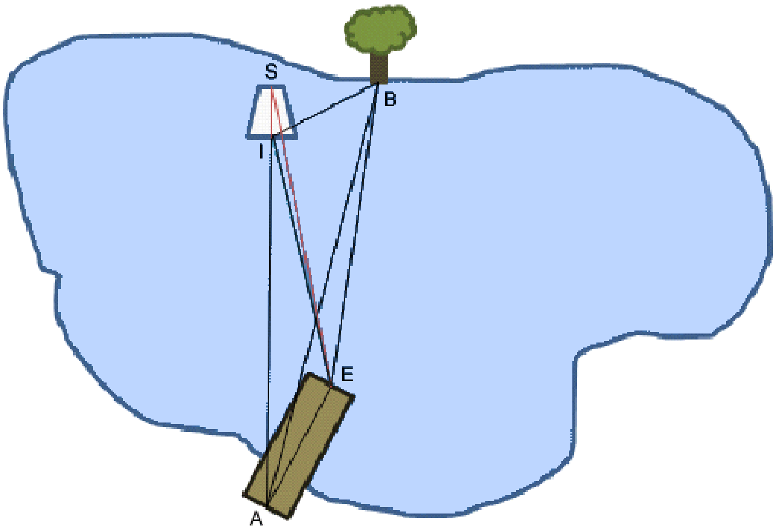
2. Von einem Viereck kennt man die Eckpunkte A(4/-3), B(14/7) und C(8/25).

a) Berechnen Sie Eckpunkt D als Schnittpunkt der Geraden g_1: $y = -3x + 9$ und g_2: $x + 2y = 28$. (2 P)
Kontrolle: D(-2/15)

b) Begründen Sie, dass es sich bei diesem Viereck um ein Parallelogramm handelt. (2 P)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.
(Flächenformel für Parallelogramm: $A = a \cdot b \cdot \sin \alpha$) (2 P)

d) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Liegt auch der Punkt D auf diesem Umkreis? (4 P)



3.

a) In Bodensdorf am Ossiachersee führt ein 10 m langer Steg quer in den See hinein. Sowohl vom Anfangspunkt A des Stegs als auch vom Endpunkt E des Stegs sieht man einen Baum B am gegenüberliegenden Ufer und eine vorgelagerte sich im Wasser befindliche Spielinsel I. Ein guter Schwimmer fragt sich, wie weit es wohl bis zur Spielinsel I bzw. wie weit es bis zu dem Baum B am Ufer ist. (Er schwimmt von E weg.) Um das zu berechnen, werden folgende Winkel bestimmt:
$\sphericalangle IAE = 56°$; $\sphericalangle BAE = 55{,}5°$; $\sphericalangle AEI = 123{,}4°$; $\sphericalangle AEB = 124°$.
Die Punkte A, E, I und B liegen alle in einer Horizontalebene. (4 P)

b) Weiters fragt sich der Schwimmer, wie weit es von der Spielinsel bis zum Baum ist und ob es somit sinnvoll wäre, zuerst zur Spielinsel und dann erst weiter zum Strand mit dem Baum zu schwimmen. (2 P)

c) Außerdem würde er gerne wissen, wie hoch die Spielinsel ist. Dazu wurde noch der Winkel $\sphericalangle IES$ (S ist die Spitze der Spielinsel) bestimmt: $\sphericalangle IES = 0{,}4°$. (2 P)

d) Für die Strecke von E nach B hat er letztes Jahr 30min gebraucht. Wenn er wieder gleich schnell schwimmt, wie lange braucht er dann von E nach I? (2 P)

4. Aus einem Artikel über die Haltbarkeit von Milch:
„Anfangs ist die Zahl der Keime noch gering, doch ab einer kritischen Menge wird die Milch schlecht. In einem Liter frisch auf dem Bauernhof gemolkener Milch finden sich bei Eintreffen in der Molkerei bereits rund 20 Millionen Keime. Durch das Pasteurisieren nimmt ihre Zahl schlagartig ab, doch die verbliebenen Keime vermehren sich rasch wieder. Bei 30 Grad Celsius verdoppelt sich die Anzahl der Keime innerhalb einer halben Stunde. Kälte bremst diesen Vorgang. Nach fünf

Tagen hat sich die Keimzahl in einem ungeöffneten Milchpackerl im Kühlschrank versechzehnfacht ...“ (Profil, 28. 3. 2011)

a) Warum dürfen Sie hier mit exponentiellen Wachstum rechnen? (1 P)

b) Die Zunahme der Bakterien kann durch die Funktion

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

dargestellt werden. Berechnen Sie die Konstante λ für die Lagerung im Kühlschrank (Einheit: 1 Tag). (2 P)

c) Um wieviel Prozent vermehren sich die Keime im Kühlschrank pro Tag? Wie lange dauert es, bis sich ihre Anzahl verdoppelt? (2 P)

d) Angenommen, nach dem Pasteurisieren enthält die Milch nur noch 1000 Keime pro Liter. Wenn die Anzahl der Keime auf 1 Milliarde steigt, wird sie sauer. Wie lange dauert das im Kühlschrank bzw. bei 30 °C? (3 P)

5.

a) Eine Maschine stellt Schrauben her, deren Länge normalverteilt mit μ = 8,00 cm und σ = 0,1 5cm ist.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube kürzer als 7,94 cm ist?

ii) In welchem symmetrischen Bereich liegen 98% der erzeugten Schrauben? (3 P)

b) Zur Probe werden 10 Schrauben untersucht und folgende Längen gemessen:
8,00 7,90 7,92 7,90 7,96 8,00 8,00 7,92 8,00 7,90
Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung. (1 P)

c) Es gibt Schrauben, deren Gewinde für Holz geeignet ist und Schrauben, deren Gewinde für Metall geeignet ist. Ein Hobbybastler hat eine Box, die sehr viele Schrauben enthält, und zwar 30% Holzschrauben und 70% Metallschrauben. Er braucht 4 Holzschrauben zur Befestigung einer Platte. Er nimmt dafür 10 Schrauben aus der Box.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 4 Holzschrauben erwischt?

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 4 bis 7 Holzschrauben erwischt? (3 P)

d) Warum dürfen Sie in Beispiel c) mit Binomialverteilung rechnen, obwohl die Schrauben nicht zurückgelegt werden? (1 P)

Ergebnisse:

1.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 2ax + b$
$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
$f(54) = 0 \Rightarrow 54^2a + 54b + c = 0$
$f(27) = 9 \Rightarrow 27^2a + 27b + c = 0$
$\underline{f'(27) = 0 \Rightarrow 54a + b = 0}$
$a = -1/81$, $b = 2/3$
Das Gleichungssystem für die Funktion g(x) ist vollkommen analog zur Funktion f(x).

b) $f'(x)=-\frac{2}{81}x+\frac{2}{3} \Rightarrow f'(0)=\frac{2}{3}=\tan\alpha \Rightarrow \alpha = 33{,}69°$
$g'(x)=-\frac{2}{243}x+\frac{2}{9} \Rightarrow g'(0)=\frac{2}{9}=\tan\beta \Rightarrow \beta = 12{,}53°$

c) $A=\int_0^{54}\left(-\frac{2}{243}x^2+\frac{4}{9}x\right)dx=\left[-\frac{2}{243}\frac{x^3}{3}+\frac{4}{9}\frac{x^2}{2}\right]_0^{54}=108$
$1{,}03\cdot 108 = 111{,}24\ m^2$

2.

a) D(-2/15)

b) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-6\\18\end{pmatrix}$, d.h. die Seiten AD und BC sind parallel und gleich lang

c) $\alpha = 63{,}43°$, A = 240

d) U(4/7); nein: |AU| = 10, |DU| = 18,44

3.

a) <AIE = 0,6°; EI = 791,687m; <ABE = 0,5°; EB = 944,39m;

b) <IEB = 0,6°; IB = 152,97m

c) h = IS = 5,527m

d) t = 25,15min

4.

a) „Bei 30 Grad Celsius verdoppelt sich die Anzahl der Keime innerhalb einer halben Stunde.“ Bei exponentiellem Wachstum ist die Verdopplungszeit konstant.

b) $\lambda = \ln(16)/5 = 0{,}5545$/Tag

c) 74 %; 1,25 Tage

d) Kühlschrank: $t = \ln(1000000)/\lambda \sim 25$ Tage
30 °C: $\lambda_2 = \ln(2)/0{,}5 = 1{,}386/h$; $t = \ln(1000000)/\lambda_2 \sim 10$ h

5.

a)

i) $z = -0{,}4$ $\Phi(-0{,}4) = 0{,}3446$

ii) $z = \pm 3{,}326$ $x_1 = 7{,}65$ cm, $x_2 = 8{,}35$ cm

b) $\bar{x} = 7{,}95\,\mathrm{cm}$, $\sigma = 0{,}044$ cm

c) i) 0,2001 (20,01%) ii) 0,3488 (34,88%)

d) Weil die Box sehr viele Schrauben enthält, bleibt die Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuch praktisch gleich.