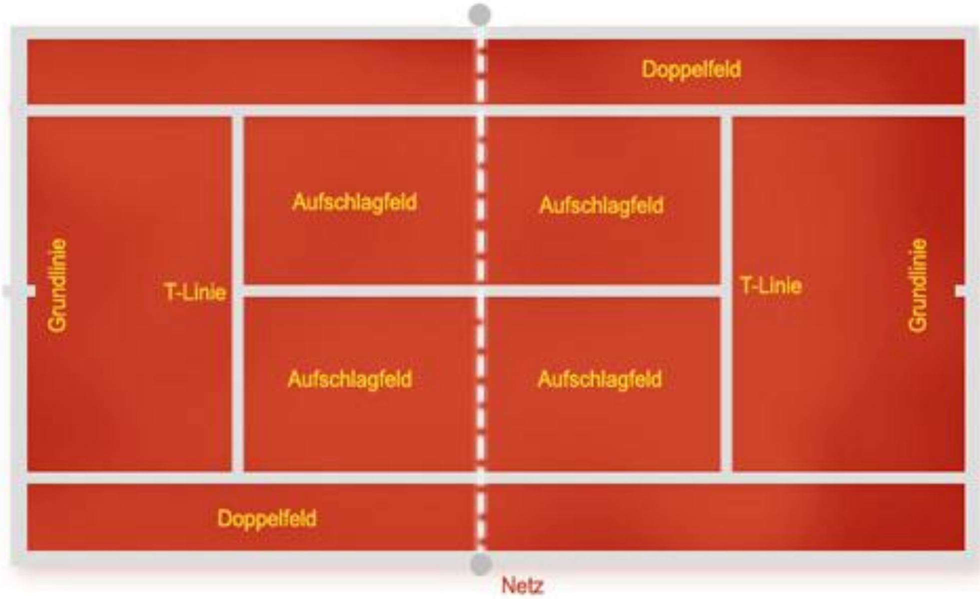
Probematura Mathematik

VHS 21 / Sommertermin 2013

1. Tennis

Tennisspieler trainieren häufig mit einer Ballwurfmaschine. Die hier beschriebene befindet sich in der einen Hälfte eines insgesamt 24 m langen Tennisfeldes und schießt Tennisbälle in die andere Feldhälfte. Die Bälle überqueren das Netz in einer Höhe von 1,21 m (Scheitelpunkt der parabelförmigen Flugbahn) und treffen 1 m vor der Grundlinie in der anderen Feldhälfte auf den Boden.



a) Zeigen Sie, dass der Weg der Bälle, die aus dieser Ballwurfmaschine geschleudert werden, durch die Funktion

$$f(x) = -0{,}01x^2 + 1{,}21$$

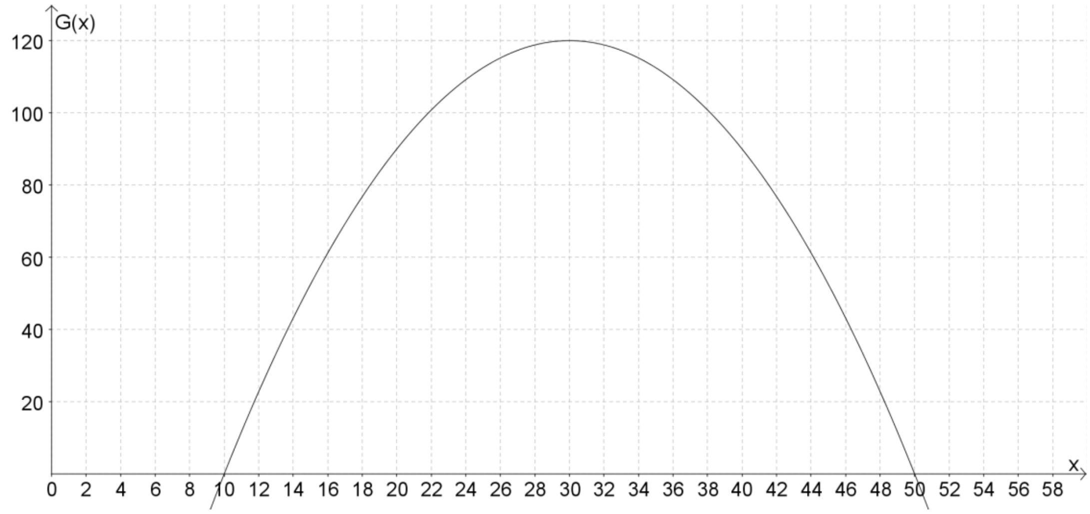
beschrieben werden kann, wenn das Netz als y-Achse des Koordinatensystems aufgefasst wird. (4P)

b) Wo steht die Ballmaschine, wenn sie die Bälle aus einer Höhe von 1 m abschießt? (3 P)

c) In welcher Höhe muss ein Tennisspieler den Ball treffen, wenn er 2 m vor dem Netz steht? (1 P)

d) Eine Straßenbahn fährt mit 45 km/h. Sie wird 2 s lang mit einer Bremsverzögerung von 3 m/s² abgebremst.
Wie hoch ist ihre Geschwindigkeit am Ende des Bremsvorgangs und welchen Weg legt sie währenddessen zurück? (4 P)

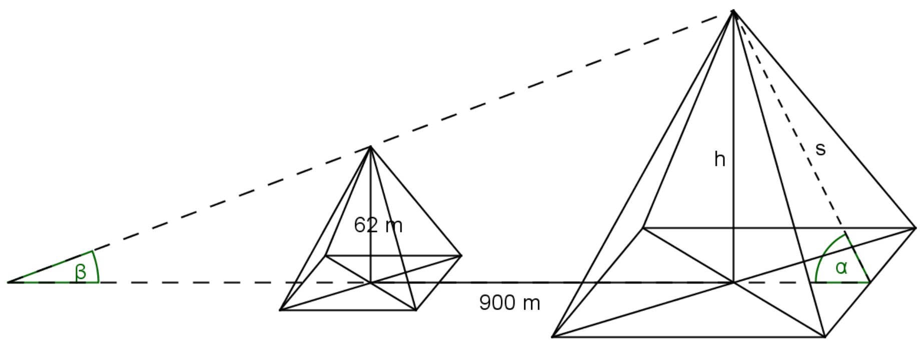
e) Die Gewinnfunktion G(x) gibt den Gewinn eines Betriebs in Geldeinheiten an, wobei x für die verkaufte Menge in Mengeneinheiten steht.



Lesen Sie aus der hier dargestellten Gewinnfunktion den maximalen Gewinn und die Menge, bei der dieser Gewinn erreicht wird, ab. (2 P)

2. Cheops-Pyramide

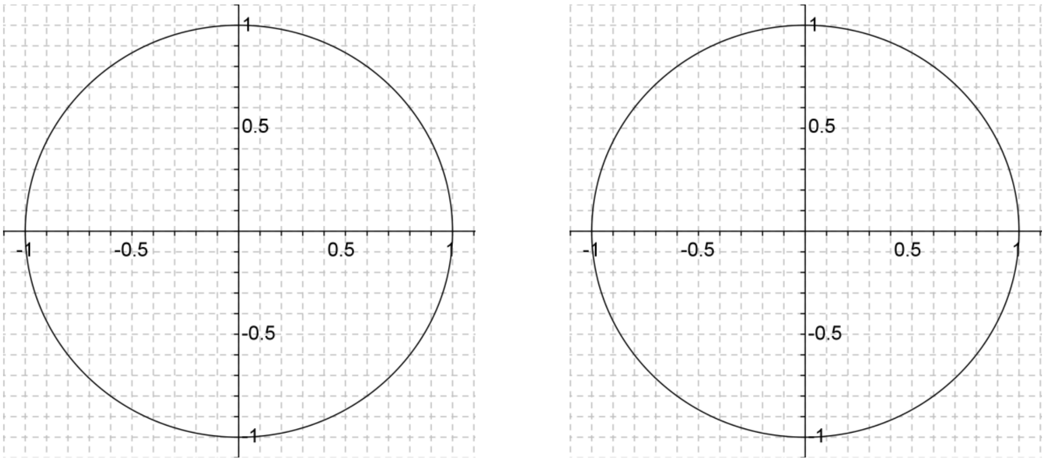
a) Die Seitenflächen der Cheops-Pyramide haben zur Grundfläche einen Neigungswinkel von ca. α = 52°. Vor langer Zeit kletterte jemand auf die Spitze der Pyramide und ermittelte die Länge s = 186,5 m. Wie hoch war die Cheops-Pyramide damals, und wie lang war eine Seitenkante der quadratischen Grundfläche? (4 P)



b) Da die Cheops-Pyramide ursprünglich mit Kalksteinplatten verkleidet war, die heute fehlen, vermuteten Wissenschaftler, dass die Pyramide heute niedriger ist als zum Zeitpunkt, zu dem der Kletterer seine Messungen vornahm. Vor kurzem wurde daher von einem Standort, von dem aus die Spitze der Cheops-Pyramide und die Spitze der von ihr 900 m entfernten 62 m hohen Mykerinos-Pyramide in einer Sichtlinie erscheinen, ein Höhenwinkel $\beta = 4{,}76°$ ermittelt. Wie hoch ist die Höhe der Cheops–Pyramide heute? (4 P)

c) Ermitteln Sie graphisch mit Hilfe der folgenden Einheitskreise: (2 P)

sin (α_1) für $\alpha_1 = 234°$ cos (β_1) für $\beta_1 = 66°$



- Für welchen weiteren Winkel α_2 im Intervall [0°; 360°] gilt:
  sin (α_2) = sin (α_1)? (1 P)
- Geben Sie – in Abhängigkeit von β_1 und im Intervall [0°; 360°] – eine Formel für die Berechnungen jenes Winkels β_2 an, für den gilt:
  cos (β_2) = cos (β_1). (1 P)

3. Abschreibung

In der Buchhaltung nimmt der Wert von Vermögensgegenständen, z.B. Maschinen, jedes Jahr ab. Diesen Vorgang bezeichnet man als Abschreibung.

a) Der Restwert einer Maschine in € lässt sich durch folgende Funktion darstellen:

$R_1(t) = 12000 – 1200\ t$ (t: Zeit in Jahren)

Berechnen Sie die Nutzungsdauer der Maschine (das ist die Zeit, nach der der Restwert Null beträgt). (2 P)

b) Bei einem anderen Modell lautet der Restwert:

$R_2(t) = 12000 \cdot 0{,}85^t$ (t: Zeit in Jahren)

- Geben Sie an, um welchen Prozentsatz der Wert pro Jahr abnimmt. (1 P)

- Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Wert der Maschine auf die Hälfte abgenommen hat. (2 P)

c) Erstellen Sie für die Funktionen aus a und b eine Wertetabelle für den Zeitraum von 0 bis 10 Jahren. Skizzieren Sie die Funktionsgraphen und lesen Sie aus der Skizze ab, ab wann der Restwert nach dem Modell b höher ist als nach dem Modell a. (4 P)

d) Erklären Sie, um welche Arten von Funktionen es sich in Aufgabe a und b handelt. (2 P)

4. Fliehkraft

Wenn ein Körper um ein Zentrum rotiert, wirkt auf ihn eine Fliehkraft (Zentrifugalkraft), die ihn nach außen zieht. Sie kann nach folgender Formel berechnet werden:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

F: Kraft in N (Newton)
m: Masse des Körpers in kg
v: Geschwindigkeit in m/s
r: Abstand von Zentrum in m

a) Beschreiben Sie, wie sich die Fliehkraft ändert,

- wenn die Geschwindigkeit verdoppelt wird, (1 P)
- wenn der Abstand verdoppelt wird. (1 P)

b) Ein Rundfunksatellit hat eine Masse von 5 Tonnen. Seine Geschwindigkeit beträgt 3000 m/s und die Fliehkraft 1070 N. Berechnen Sie die Entfernung des Satelliten vom Erdmittelpunkt in Meter und geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung an. (2 P)

c) Die Formel $\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$ soll nach b bzw. $\frac{1}{b}$ umgeformt werden. Geben Sie an, welche der folgenden Umformungen richtig bzw. falsch sind. (3 P)

- $\frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$ ☐ richtig ☐ falsch
- $\frac{f\,.g}{f-g} = b$ ☐ richtig ☐ falsch
- $\frac{f \cdot g}{g-f} = b$ ☐ richtig ☐ falsch
- $\frac{g-f}{f \cdot g} = \frac{1}{b}$ ☐ richtig ☐ falsch
- $f - g = b$ ☐ richtig ☐ falsch

d) Drei Punkte haben die Koordinaten A(1/3), B(7/-6), C(7/7).

- Zeigen Sie rechnerisch, das das Dreieck ABC rechtwinkelig ist. (2 P)
- Berechnen Sie den Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (2 P)

5. Bankomat

a) Bei einem Bankomaten wurde die Anzahl der Behebungen pro Woche über einen Zeitraum von 8 Wochen dokumentiert.

Woche	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Behebungen	1 420	1 950	2 321	8 600	3 455	1 876	1 756	2 325

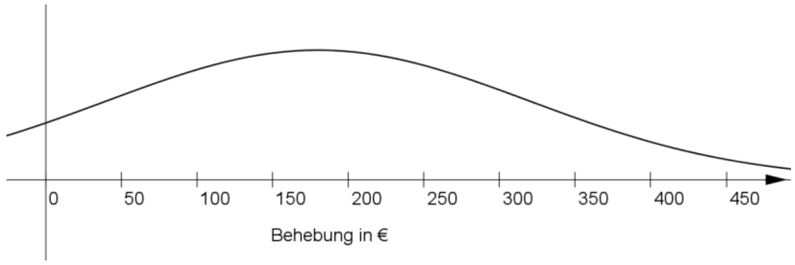
- Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median. (2 P)
- Argumentieren Sie, welcher Wert aussagekräftiger ist. (2 P)

b) Bei jeder fünften Behebung werden über 300 € abgehoben. Interpretieren Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten in diesem Zusammenhang:

- $\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8$ (2 P)
- $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ (2 P)

c) Angenommen, die Höhe der Behebungen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 180 € und der Standardabweichung σ = 140 €.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 100 € und 300 € abgehoben werden. (2 P)
- Markieren Sie die Fläche, die dieser Wahrscheinlichkeit entspricht, im folgenden Diagramm. (2 P)



Notenschlüssel:

Note	Sehr Gut (1)	Gut (2)	Befriedigend (3)	Genügend (4)	Nicht Genügend (5)
Punkte	55 – 60	48 - 54	39 - 47	30 - 38	0 – 29