Lineare Funktionen (=Linie)

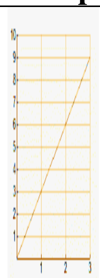
Was sind Funktionen?

Wikipedia definiert das so:

> *Eine **Funktion** drückt die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen aus. Traditionell wird eine Funktion als Regel oder Vorschrift definiert, die eine Eingangsgröße (Argument, meist x) in eine Ausgangsgröße (Funktionswert, meist y) transformiert (überführt).*
> *Häufig werden auch die Begriffe Abbildung und Operation für Funktionen verwendet.*

siehe auch: http://www.mathe-online.at/mathint/fun1/i.html

Welche **Erscheinungsformen von Funktionen** gibt es?

Zuordnungsvorschrift (Term)	**Tabelle**	**Graph**
jeder Menge x soll der Preis y zugeordnet werden, z.B.: **y = 3x**, wenn 1 kg Kartoffeln 3 € kostet	x kg y Euro 1 3 2 6 3 9	

Die linearen Funktionen sind als **Linie** darstellbar. Sie sind über der Definitionsmenge IR definiert:

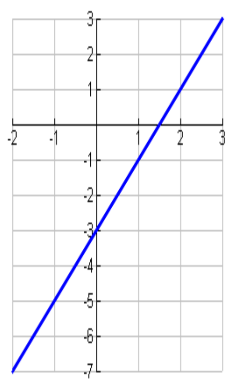
1. Schreibweise: f: $\boxed{y = k{\cdot}x + d}$ (**KEKS und TEE – Funktion**)
2. Schreibweise: $f(x) = k{\cdot}x + d$

1.Beispiel: y= 2x–3 soll mit Wertetabelle und Graph im Intervall [-2;3] dargestellt werden

Lösung:

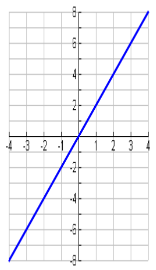
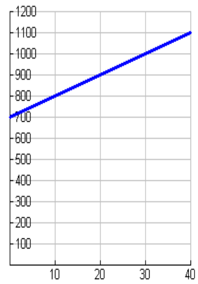
Aus der Funktion wird durch Ersetzen von x durch verschiedene Zahlen eine Wertetabelle und dann der Graph daraus:

x	y = 2•**x**–3
-2	2·(**-2**) –3= **–7**
-1	2·(**-1**) –3= **–5**
0	2·(**0**) –3= **–3**
1	2·(**1**) –3= **–1**
2	2·(**2**) –3= **1**
3	2·(**3**) –3= **3**

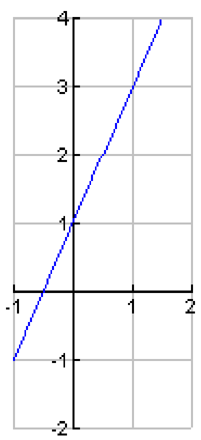
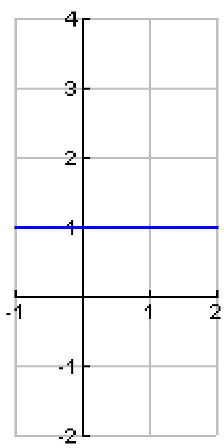
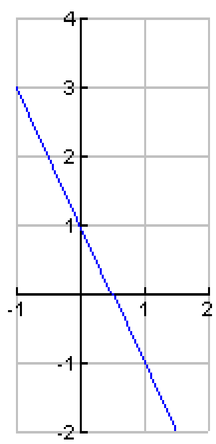


Lineare Funktion y = k·x+d

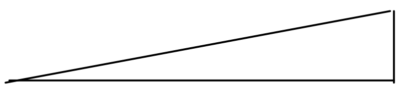
Bedeutung von d:

d = 0 **d**irekt **p**roportional (**doppelt** → **doppelt**) (also homogen)	**d ≠ 0** **nicht d**irekt **p**roportional (sondern inhomogen)
Beispiel: y = 2•x „Kartoffelfunktion“ 1 kg Kartoffel kostet 2 € 2 kg Kartoffel kosten 4 € •2 3 kg Kartoffel kosten 6 € ·2 4 kg Kartoffel kosten 8 € 5 kg Kartoffel kosten 10 €  Die Kartoffel-Funktion geht durch den Ursprung	Beispiel: y = 10•x **+ 700** „Handyfunktion“ 0 min telefonieren kostet 700 Cent 10 min telefonieren kostet 800 Cent •2 20 min telefonieren kostet 900 Cent **≠ •2** 30 min telefonieren kostet 1000 Cent 40 min telefonieren kostet 1100 Cent  Die Handyfunktion geht nicht durch den Ursprung

Bedeutung von k:

k>0 **steigende** Linie	k=0 **waagrechte** Linie	k<0 **fallende** Linie
y = 2x +1	y = 1	y = –2x+1
		

k gibt die **Steigung** an: nicht in % sondern in Vielfachem von 1
– hier am Beispiel 20% Steigung:



senkrecht: 20% bzw. **0.20**

waagrecht = 100% bzw. **1**

k gibt bei Anwendungsbeispielen die **Zunahme <u>pro</u> Einheit** an: **k = 2** € <u>pro</u> kg Kartoffeln

2. Beispiel: Untersuche die Funktion: y = 2x–3

a) auf die Nullstelle (Schnitt mit der x-Achse)
b) auf den Fixpunkt (Schnitt mit der 45°-Geraden)
c) Wie lautet die Umkehrfunktion?
d) Wie sieht der Graph von Funktion und Umkehrfunktion aus?

Lösung:

a) Die **Nullstelle** ist der Schnitt mit der x-Achse, also muss dort y=0 sein, was zur Gleichung:
$0 = 2x-3$ führt ➔ $3 = 2x$ ➔ $x = 1{,}5$ ➔ **Nullstelle N (1,5 | 0)**

b) Der **Fixpunkt** ist der Schnitt mit **der 45°-Geraden**, die durch die Formel **y = x** erhalten wird, also kann man den Schnittpunkt hier durch Gleichsetzen der 2 Funktionen $y = 2x-3$ und $y = x$ erhalten: $2x-3 = x$ ➔ $x - 3 = 0$ ➔ $x = 3$ ➔ $y = x = 3$ ➔ **Fixpunkt F(3|3)**

c) **Umkehrfunktion:**

Wenn die Funktion: $y = 2x-3$ gegeben ist, so erhält man den Term der Umkehrfunktion durch Vertauschen von x und y : $x = 2y-3$
und Umformen auf y: $x + 3 = 2y$

➔ $\boxed{y = \frac{x+3}{2}}$

Bei der Wertetabelle muss man nur die Seiten vertauschen:

f: y= 2x–3

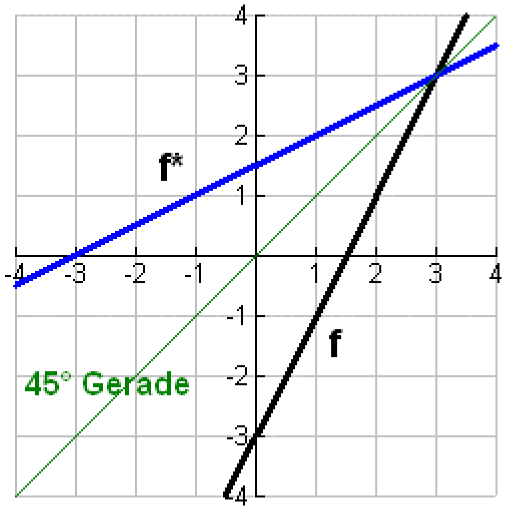
x	y
–1	2·(–1)–3 = –5
0	2·(0) – 3 = –3
1	2·1 – 3 = –1
2	2·2 – 3 = 1

⟺

f^{-1} : $y = \frac{x+3}{2}$

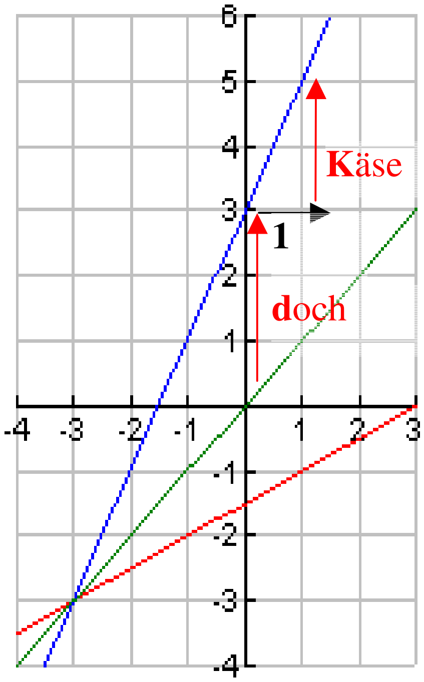
x	y
–5	–1
–3	0
–1	1
1	2

d) **Graph** ➔



3.Beispiel:
Zeichnen Sie die Funktion y =2x + 3 [-2; 3] mit der DOCH-EIN-KÄSE-Methode:

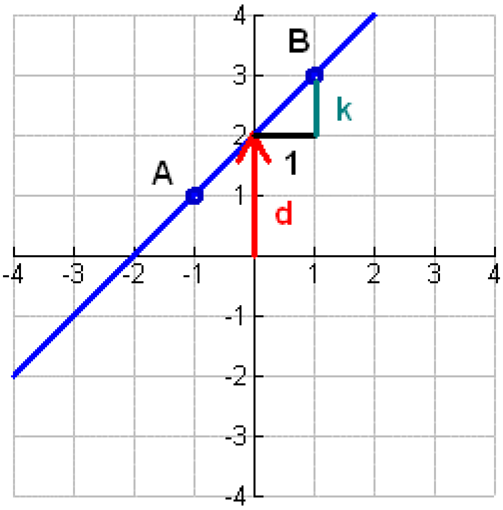
Lösung:
d ist der Abstand der Geraden auf der y–Achse, also müssen wir mit **DOCH** hinauf
dann kommt das Steigungsdreieck, das mit **1** nach rechts beginnt
und mit **K**ÄSE nach oben endet



4.Beispiel:
Bestimmen Sie den Term der linearen Funktion, deren Graph durch A(-1|1) und B(1|3) geht.

Lösung

grafische Methode:
Wir erstellen eine Grafik mit den Punkten A,B:



dann lesen wir die Werte ab:
auf der y-Achse ist d: d = 2
Das Steigungsdreieck mit der waagrechten Seite **1**
ergibt in y-Richtung k = 1

damit wird der Funktionsterm: f: **y = 1x+2**

Rechnerische Methode1:

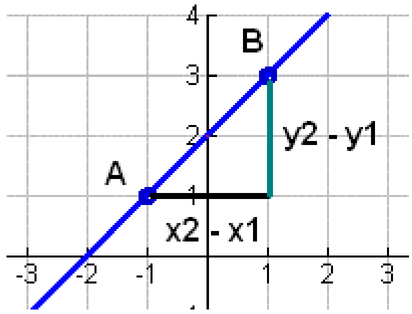
Wir wollen eine **Keks+Dee**-Funktion: $y = k \cdot x + d$
Wir setzen ein: A(x = –1| y = 1): $1 = k \cdot (-1) + d$
Wir setzen ein: B(x = 1 | y = 3): $3 = k \cdot 1 + d$
Wir rechnen aus der ersten Gleichung aus: $d = 3 - k$
und setzen in die zweite Gleichung ein:

$1 = k \cdot (-1) + 3 - k$
$1 = -2k + 3 \qquad |-3$
$-2 = -2k \qquad |:(-2)$
$\underline{1 = k}$

eingesetzt in die d-Gleichung ergibt: $\underline{d =} 3 - 1 \underline{= 2}$

damit wird die Funktion: y = 1x+2

Rechnerische Methode 2: k kann aus dem Differenzenquotienten des Steigungsdreiecks berechnet werden :



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \rightarrow \quad A(x_1 = -1 \mid y_1 = 1) \;\; B(x_2 = 1 \mid y_2 = 3)$$

$$\rightarrow \quad k = \frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

d berechnet man aus der umgeformten
y = kx+d – Gleichung : $d = y_1 - k \cdot x_1 = 1 - 1 \cdot (-1) = \mathbf{2}$

Anwendungen der linearen Funktion:

Kostenfunktion	**Abschreibung: Buch(Rest)wertfunktion**
Stromkosten: Fixkosten pro Jahr: 7 € (d) Kosten **<u>pro</u>** kWh: **0,15** € (**k**) **Kostenfunktion**: y = **0,15** x + 7	Computer: Einkaufspreis: 1800 € (d) Abschreibung **<u>pro</u>** Jahr: **450** € (**k**) **Buch(Rest)wertfunktion**: y = **– 450** x + 1800

5. Beispiel: Anwenderaufgabe:

a) Bestimmen Sie für eine Taxifahrt die **Kostenfunktion**:
Grundgebühr: 2 € und Kilometerpreis: 1,20 € **pro** km.
b) Wie viel bezahlt man für eine Fahrt über 10 km?.
c) Wie viel Kilometer ist das Taxi gefahren, wenn man 20 € zahlen muss?

Lösung:

a) Die variablen Kosten (**pro**) sind k, die Fixkosten sind d → $y = 1{,}20\,x + 2$
b) wenn x = 10 km ist, dann ist → $y = 1{,}20 \cdot 10 + 2 = 12 + 2 = 14$
c) wenn y = 20 € sind, dann ist: → $20 = 1{,}20 \cdot x + 2$ – das ist eine Gleichung!

$20 - 2 = 1{,}20x \qquad |:1{,}20$
$18 : 1{,}20 = x \qquad$ | Seiten umdrehen
$\underline{\mathbf{x = 15}}$

<u>LINKS:</u>
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/java/linearefunktionen.htm
http://www.mallig.eduvinet.de/mathe/8linf/8linf1a.htm
http://mone.crillovich-cocoglia.at/index.php?VG=58
http://www.mathe-online.at/galerie/fun1/fun1.html