

# Finanzmathematik

## 1. Kapitalverzinsung:

### **Beispiel 1:**

Ein Kapital (Kredit) von 3000 € wird mit 5% verzinst. Wie viel bekommt man am Ende eines Jahres samt Zinsen?

### **Lösung:**

Die Zinsen  $Z$  werden so berechnet:  $Z = K_0 \cdot p/100 = 3000 \cdot 5/100 = 150$

Das Endkapital am Ende des Jahres beträgt dann  $K_1 = K_0 + Z = \underline{3150 \text{ €}}$

### **Wie geht es ohne Zwischenschritt?**

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p/100 = K_0 \cdot (1 + p/100) = K_0 \cdot q$$

$$K_1 = 3000 \cdot (1 + 5/100) = 3000 \cdot 1,05 = \underline{3150 \text{ €}}$$

– damit sind wir für die **Turbospeed**-Berechnung von Kapitalien mit Zins und Zinseszins bereit!

**Formel:**  $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$  mit  $q = 1 + \frac{p}{100}$

### **Beispiel 2:**

Ein Kapital von 3000 € soll 4 Jahre mit 5% Zinsen verzinst werden. Wie viel ist der Endbetrag?

### **Lösung:**

Mit der langsamen Methode müsste man jedes Jahr die Zinsen berechnen und dann dazu schlagen, mit der TURBO-Methode geht es schneller: Für jedes Jahr muss man mit  $(1+p/100) = q = 1,05$  multiplizieren, so dass sich nach 4 Jahren ergibt:

$$K_4 = K_0 \cdot q^4 = 3000 \cdot (1 + 5/100)^4 = 3000 \cdot 1,05^4 = \underline{3646,52 \text{ €}}$$

### **Beispiel 3:**

1. Umkehraufgabe: Welches Kapital muss ich heute anlegen, um 20 000 € nach 10 Jahren bei 3% Verzinsung zu bekommen?

### **Lösung:**

Wir können die Formel zuerst umformen:  $K_0 = K_n / (1+p/100)^{10} = 20\,000 / 1,03^{10} = 14881,88 \text{ €}$

### **Beispiel 4:**

2. Umkehraufgabe: Bei welchem Zinssatz wurde ein Kapital von 4500 € angelegt, wenn es in 5 Jahren auf 5344,59 € angewachsen ist?

### **Lösung:**

Jetzt probieren wir das Einsetzen in die Formel ohne vorheriges Umformen:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$5344,59 = 4500 \cdot q^5 \quad | : 4500$$

$$1,18769 = q^5 \quad | \text{ 5. Wurzel ziehen}$$

$$q = \sqrt[5]{1,18769} = 1,035$$

$$1 + p/100 = 1,035 \rightarrow p = 3,5\%$$

### Beispiel 5:

3. Umkehraufgabe: Wie lange muss ich ein Kapital von 1000 € auf der Bank zu 4,5% liegen lassen, damit ich 2000 € bekomme?

### Lösung:

Hier hilft nur **systematisches (binäres) Probieren**, wenn man den *Logarithmus* nicht kennt:

$$1000 \cdot 1,045^{10} = 1552,97 \quad - \text{ zu wenig}$$

$$1000 \cdot 1,045^{20} = 2411,71 \quad - \text{ zu viel}$$

$$1000 \cdot 1,045^{15} = 1935,28 \quad - \text{ etwas zu wenig}$$

$$1000 \cdot 1,045^{16} = 2022,37 \quad - \text{ etwas zu viel}$$

also müssen wir ca. **15 ½ Jahre** warten bis sich das Kapital verdoppelt.

$$\begin{aligned} \text{mit Logarithmus wird das einfacher: } 2000 &= 1000 \cdot 1,045^n && | :1000 \\ 2 &= 1,045^n && | \log \\ \log(2) &= n \cdot \log(1,045) && | : \log(1,045) \\ n &= \log(2) / \log(1,045) = 15,75 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

### Übungen:

1) Berechnen Sie den **Endwert**  $K_n$  eines Kapitals für:

a)  $K_0 = 12000$   $p = 4\%$   $n = 6$

b)  $K_0 = 5400$   $p = 3,5\%$   $n = 12$

c)  $K_0 = 2000$   $p = 3\%$   $n = 50$

d)  $K_0 = 4000$   $p = 4,5\%$   $n = 4,5$

e)  $K_0 = 5500$   $p = 6,5\%$   $n = 10 \frac{3}{4}$

f)  $K_0 = 13000$   $p = 4,5\%$   $n = 8 \frac{200}{360}$

2) Berechnen Sie das Anfangskapital  $K_0$ , wenn:

a)  $K_6 = 12000$   $p = 4\%$

b)  $K_{12} = 5400$   $p = 3,5\%$

c)  $K_n = 2000$   $p = 3\%$   $n = 50$

d)  $K_n = 4000$   $p = 4,5\%$   $n = 4 \frac{3}{12}$

e)  $K_n = 5500$   $p = 6,5\%$   $n = 10 \frac{2}{12}$

3) Bestimmen Sie den **Zinssatz**  $p$ , wenn:

a)  $K_0 = 12000$   $K_n = 16422,83$   $n = 8$

b)  $K_0 = 7500$   $K_5 = 10036,69$

c)  $K_0 = 5611,04$   $K_{12} = 8000$

d)  $K_0 = 4000$   $K_5 = 4629,74$   $n = 4 \frac{3}{12}$

e)  $K_0 = 5500$   $K_n = 9100,88$   $n = 10$  Jahre 3 Monate 26 Tage

4) Berechnen Sie die **Verzinsungsdauer**  $n$  für:

a)  $K_0 = 4500$   $K_n = 6122,20$   $p = 8\%$

b)  $K_0 = 4000$   $K_n = 6500$   $p = 5,5\%$

c)  $K_0 = 12\,400$   $K_n = 21\,028,93$   $p = 4,5\%$

d)  $K_0 = 8000$   $K_n = 10\,000$   $p = 5,5\%$

e)  $K_0 = 28\,765,67$   $K_n = 42\,500$   $p = 5\%$

f)  $K_0 = 12\,000$   $K_n = 13\,000$   $p = 11\%$

5) Welchen Betrag muss man **heute** anlegen, um bei 6% Zinseszins in 5 Jahren über 10 000 € zu verfügen?

6) Wie groß ist der berechnete Zinssatz  $p$ , wenn ein Kapital von 2500 € in 8 Jahren auf 2816,23 € angewachsen ist?

7) Wie lange muss man bei 0,4% Zinsen ansparen, um das Anfangskapital 3500 € auf 4000 € anwachsen zu lassen?

8) Was ist günstiger?

a) Ein Kapital von 2000 € 5 Jahre zu 1% zu verzinsen

b) Ein Kapital von 2000 € 1 Jahr zu 5% zu verzinsen ?

**Lösungen:**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
1)	15 183,83	8159,77	8767,81	4876,22	10823,58	18944,97
2)	9483,77	3573,63	456,21	3317,54	2899,40	
3)	4%	6%	3%	3,5%	5%	
4)	4 Jahre	9 Jahre 24 Tage	12 Jahre	4 Jahre 2 Monate	8 Jahre	9 Monate 6 Tage

5)  $K_0 = 7472,58 \text{ €}$

6)  $p = 1,5 \%$

7)  $n = 33,5 \text{ Jahre}$

8) a)  $K_n = 2102,02 \text{ €}$

b)  $K_n = 2100 \text{ €}$

a) ist nominell besser wegen den Zinseszinsen