Was ist der Differentialquotient in der Physik ?

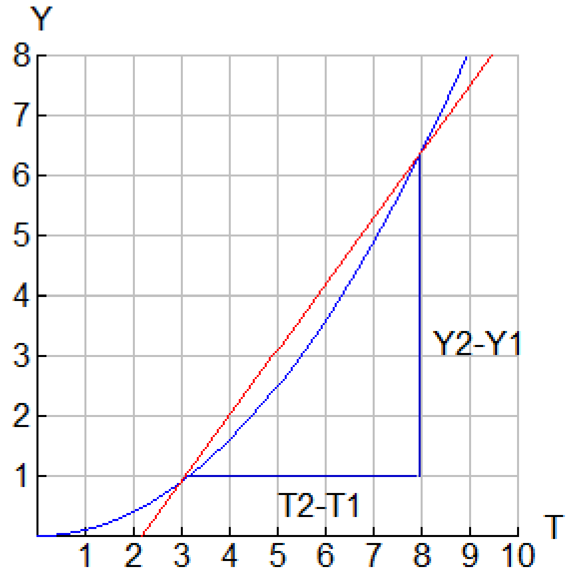
Ein Auto fährt auf der A1 von Wien nach Salzburg. Wir können diese Fahrt durch eine Funktion s(t) beschreiben, die zu jedem Zeitpunkt t (Stunden oder Sekunden) die Strecke s(t) (in Kilometer oder Meter) als Entfernung von Wien angibt.
Frage: Wie groß ist die **mittlere Geschwindigkeit** des Fahrzeugs zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ?

LÖSUNG:

mittlere Geschwindigkeit = $\frac{gefahrene Strecke}{benötigte Zeit}$ oder $\boxed{V_m = \frac{s2-s1}{t2-t1} = \frac{Weggdifferenz}{Zeitdifferenz}}$

Dieser Ausdruck heißt **Differenzenquotient**.

Graphische Darstellung des Differenzenquotienten:



Wie groß ist die ***momentane Geschwindigkeit*** des Autos zum Zeitpunkt t_1 ?

LÖSUNG:
Wir können die mittlere Geschwindigkeit des Autos zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 für ein möglichst kleines $\Delta t = t_2 - t_1$ berechnen. Je kleiner dieses Δt ist desto eher wird der Differenzenquotient mit der Momentangeschwindigkeit übereinstimmen.

<u>DEFINITION</u>

Die **Momentangeschwindigkeit** ergibt sich aus dem Grenzwert (Limes) des Differenzenquotienten und heißt **Differenzialquotient**:

$$\boxed{s'(t) = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s2-s1}{t2-t1}}$$

Damit können wir nun folgendes festhalten:

Wenn in der Physik eine **Wegstreckenfunktion s(t)** eines bewegten Körpers (Auto, Kugel,...) gegeben ist, so kann man daraus die **Momentangeschwindigkeit v(t)** durch differenzieren berechnen: $\boxed{v(t) = s'(t)}$.

Außerdem kann man die (Momentan–)**Beschleunigung** a(t) durch nochmaliges Differenzieren bekommen: $\boxed{a(t) = s''(t) = v'(t)}$.

Dazu die **Einheiten**:
- s(t) wird meist in Meter
- v(t) wird meist in Meter pro Sekunde
- a(t) wird meist in Meter pro Sekundenquadrat angegeben

Beispiel 1:
Der freie Fall eines Körpers ohne Berücksichtigung der Luftreibung kann durch die folgende Wegfunktion beschrieben werden: $s(t) = -g/2 * t^2$ (mit $g = 9{,}81\ m/s^2 \approx 10\ m/s^2$)
− Berechnen Sie damit die Momentangeschwindigkeit und die Momentanbeschleunigung durch Differenzieren.
− Wie groß ist die Momentangeschwindigkeit nach 3 Sekunden?
− Wie tief ist der Gegenstand dann gefallen?

Lösung:
Durch Differenzieren erhält man:
$s'(t) = \mathbf{v(t)} = -g/2 * 2t = \mathbf{-g*t}$ ($\approx 10t$)
$s''(t) = \mathbf{a(t)} = \mathbf{-g}$ (≈ 10)
Nach 3 Sekunden ist
$y(3) = -g/2*3^2 \approx -5*9 = $ **−45 m Falltiefe**
$v(t) = -g*3 \approx -30\ m/s$
(mit 3,6 multipliziert ergibt das **108 km/h Geschwindigkeit** !)

Beispiel 2:
Ein Schütze schießt mit einer Druckluftpistole von einem s_0 =160 m hohen Hochhaus in Dubai senkrecht in die Luft.
Die Kugel erreicht eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 70\ m/s$.
Gleichzeitig wirkt die Schwerebeschleunigung der Erde mit rund $g \approx 10\ m/s^2$.
a) Setzen Sie daraus die Formel für die Wegfunktion $s(t) = s_0 + v_0*t - g/2*t^2$ zusammen.
b) Berechnen Sie, wann die Kugel wieder auf den Boden (Höhe = 0) fällt.
c) Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel dabei hat.
d) Berechnen Sie, welche maximale Höhe die Kugel erreicht (Hinweis: Dort hat die Kugel die Geschwindigkeit = 0)
e) Zeichnen Sie ein s−t−Diagramm des zeitlichen Ablaufs

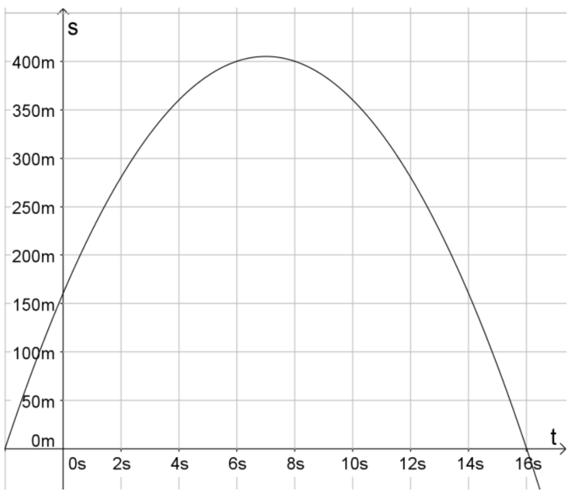
Lösung:
a) Durch Einsetzen der Zahlen erhält man: $s(t) = 160 + 70\cdot t - 5\ t^2$
b) Hier brauche ich die Wegstreckenfunktion nur Null setzen:
$0 = 160 + 70t - 5t^2$
Durch Umstellen der Gleichung auf fallende Potenzen von t und Lösung mit der quadratischen Lösungsformel erhält man: $t_1 = -2$ und $t_2 = 16$

Natürlich ist die richtige Lösung: Nach **16 Sekunden** ist die Kugel am Boden. (eine negative Lösung nimmt an, dass von Höhe Null geschossen wurde)

c) Durch Differenzieren der Wegstreckenfunktion erhält man:
$s'(t) = \mathbf{v(t)} = 70-10t$
Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t=16 beträgt dann: $v(16) = 70-10\cdot16 = -90$
Die Geschwindigkeit beim Bodenkontakt ist 90 m/s (mal 3,6 ➔ 324 km/h)
Das Minus bedeutet, dass die Bewegung nach unten geht.

d) Für die maximale Höhe muss ich nur die Geschwindigkeit Null setzen (siehe: Extremwert: Ableitung Null setzen)
$\mathbf{v(t)} = 70-10t = 0$ ➔ $t = 7$ s
Setze ich die 7 Sekunden in die Wegstreckenfunktion ein, so erhalte ich
$s(7) = 160+70\cdot7-5\cdot7^2 =$ **405 m höchste Höhe.**

e) Für die Zeichnung brauche ich eine Wertetabelle und dann den Graph:



x	y
0	160
2	280
4	360
6	400
8	400
10	360
12	280
14	160
16	0

Beispiel 3:
Ein Rennauto fährt mit voller Beschleunigung vom Stand los und das ergibt die folgende Wegstreckenfunktion $s(t) = 6t^2-t^3/6$ für die ersten 12 Sekunden
(t in Sekunden, s in Meter)
a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autos nach 10 Sekunden
b) Berechnen Sie, wann das Auto 100 km/h erreicht.
c) Berechnen Sie, wie weit das Auto bei Erreichen der 100 km/h gefahren ist.
d) Berechnen Sie die Beschleunigung des Autos nach 10 Sekunden
e) Berechnen Sie, wann die Beschleunigung Null erreicht ist und welche Geschwindigkeit das Auto dann erreicht hat

Lösung:
a) Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Ableitung der Wegstreckenfunktion:
$s'(t) = v(t) = 12t-3t^2/6 = \mathbf{12t-t^2/2}$
Nach t=10 Sekunden ist das $v(10) = 12\cdot10 - 10^2/2 = 70$ m/s (= 252 km/h)
b) 100 km/h ist nach Division durch 3,6 in Meter pro Sekunde: ~28 m/s
Durch Einsetzen in die Geschwindigkeit ergibt sich: $28 = 12t-t^2/2$
Das ist eine quadratische Gleichung – deren Lösung ist: **2,6 s** und 21,4 s
Das muss die kleine Lösung sein, da wir nur bis t=12 s rechnen dürfen.

c) Die Strecke, die das Auto bis dahin zurückgelegt hat, erhält man durch Einsetzen von $t = 2{,}6$ in die Streckenfunktion $s(t) = 12t - t^2/2$
➔ $s(2{,}6) = 12 \cdot 2{,}6 - 2{,}6^2/2 =$ **27,8 m**
d) Die Beschleunigung ergibt sich durch Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = 12t - t^2/2$ ➔ $a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - t$
Die Beschleunigung nach 10 Sekunden ist $a(10) = 12 - 10 =$ **2 m/s²**
e) Die Beschleunigung wird Null, wenn **t= 12 s** ist, wie man erkennt, wenn man $12 - t = 0$ setzt. Die Geschwindigkeit, die das Rennauto dann hat, ist $v(12) = 12 \cdot 12 - 12^2/2 =$ **72 m/s (260 km/h)**

Übungen:

1) Für ein Auto mit Beschleunigung $a = 3$ m/s² ist die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden zu berechnen und der Weg, der bis dahin zurückgelegt wurde, wenn mit der Wegformel $s(t) = a/2*t^2$ gerechnet wird.

2) Für einen Zug gilt die Beschleunigung $a = 0{,}5$ m/s². Berechnen Sie die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden und den bis dahin zurückgelegten Weg, wenn mit der Wegformel $s(t) = a/2*t^2$ gerechnet wird.

3) Peter läuft beim Sprint mit Beschleunigung $a = 2$ m/s² los. Wie lange dauert es, bis er damit seine Höchstgeschwindigkeit von 8 m/s erreicht? Welchen Weg hat er dann zurückgelegt? Wenn er danach mit konstant 8 m/s weiterläuft – wie viel Zeit braucht er für 100m? (zuerst $s(t) = a/2*t^2$ dann $s(t) = v \cdot t$)

4) Beim **Bremsen** wird genau so gerechnet wie beim Beschleunigen. Nur umgekehrt. Die Wegfunktion kann man wieder verwenden: $s(t) = a/2*t^2$. Die Geschwindigkeitsfunktion auch: $v(t) = a*t$.
a) Man zeige, dass durch Elimination des Zeitparameters t beide Formeln zu einer neuen Formel zusammengefasst werden können: $v^2 = 2a*s$
b) Damit berechne man den Bremsweg bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 72 km/h (= ? m/s), wenn man weiß, dass die Bremsverzögerung 6 m/s² beträgt
c) Aus den Bremsspuren eines Autounfalls kann man einen Bremsweg von 40 m erkennen. Welche Anfangsgeschwindigkeit hatte der Autolenker bei einer Bremsverzögerung von 6 m/s²?

5) Beim **senkrechten Wurf** gilt $s(t) = y(t) = v_0*t - g/2*t^2$. Jemand schießt mit $v_0 = 15$ m/s einen Ball ab. Welche maximale Wurfhöhe erreicht er? Wie lange dauert es bis der Ball wieder unten ankommt?

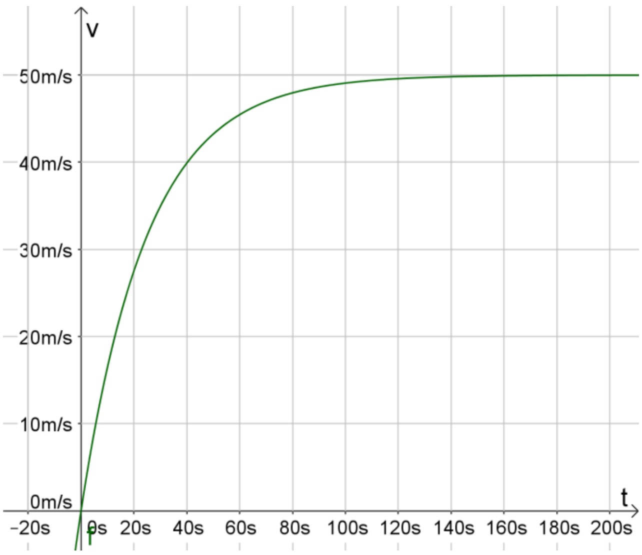
6) Ein **Schütze** schießt mit einer Druckluftpistole von einem $s_0 = 55$ m hohen Hochhaus senkrecht in die Luft.
Die Kugel erreicht eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 50$ m/s.
Gleichzeitig wirkt die Schwerebeschleunigung der Erde mit $g \approx 10$ m/s².
a) Setzen Sie daraus die Formel für die Wegfunktion $s(t) = s_0 + v_0*t - g/2*t^2$ zusammen.
b) Berechnen Sie, wann die Kugel wieder auf den Boden (Höhe = 0) fällt.
c) Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit die Kugel dabei hat.
d) Berechnen Sie, welche maximale Höhe die Kugel erreicht (Hinweis: Dort hat die Kugel die Geschwindigkeit = 0)

7) Ein Auto fährt mit voller Beschleunigung vom Stand los und das ergibt die folgende Wegstreckenfunktion $s(t) = 4t^2-t^3/12$ für die ersten 16 Sekunden
(t in Sekunden, s in Meter)
a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autos nach 8 Sekunden
b) Berechnen Sie, wann das Auto 100 km/h erreicht.
c) Berechnen Sie, wie weit das Auto bei Erreichen der 100 km/h gefahren ist.
d) Berechnen Sie die Beschleunigung des Autos nach 8 Sekunden
e) Berechnen Sie, wann die Beschleunigung Null erreicht ist und welche Geschwindigkeit das Auto dann erreicht hat.

8) Ein Auto beschleunige mit abnehmender Beschleunigung, so dass die Geschwindigkeitsfunktion angenähert werden kann mit $v(t) = 50*(1-e^{-0,04t})$ Berechnen sie damit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung nach 0, 20, 100 und 200 Sekunden. Machen Sie damit ein Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm! Wird das Geschwindigkeitsmaximum in endlicher Zeit erreicht und wie groß ist es?

<u>Lösungen:</u>

1) s = 150m v = 30 m/s = 108 km/h
2) s = 25 m v = 5 m/s = 18 km/h
3) s = 16 m t = 4+10,5 sec = 14,5 sec
4) s = 33,3 m v = 21,9 m/s ≈ 79 km/h
5) s = 11,25 m t = 2*1,5 sec = 3sec
6) a) $s(t) = 55+50t-5t^2$ b) 11s c) −60 m/s d) t=5s und s=180 m
7) a) v(8)= 48 m/s b) nach ca. 4s oder 28s c) 57,55 m oder 1307,78 m
d) $4 m/s^2$ e) nach 16 s mit 64 m/s = 230 km/h
8) Das Maximum mit 50 m/s = 180 km/h wird exakt erst im Unendlichen erreicht



t	v
0	0
20	27,5
100	49,1
200	49,98