Exponentielles Wachstum

Alle Vorgänge, bei denen eine Größe pro Zeiteinheit um einen konstanten Faktor zu- oder abnimmt (wo also das Wachstum bzw. die Abnahme proportional zur vorhandenen Größe ist), können durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Das bekannteste Beispiel ist wohl die Formel für die Zinseszinsen:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n$$

(n: Anzahl der Jahre, K_0: Anfangskapital, K_n: Kapital nach n Jahren)
Wie man sieht, beträgt der Wachstumsfaktor hier (1 + p/100), bei einem Zinssatz von 5% ergibt sich also 1,05.
Die Exponentialfunktion kann dargestellt werden mit beliebiger Basis. Eine Funktion, die **exponentielles Wachstum** beschreibt, ist immer nach dem gleichen Schema aufgebaut:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

N(t): Anzahl nach der Zeit t
N_0: Anfangswert
a: Wachstumsfaktor (bei Wachstum ist a = 1+p/100 > 1
bei Abnahme ist a = 1–p/100 < 1)

Beispiel:
Die Bevölkerung eines Landes ist in 10 Jahren von 5 Millionen auf heute 6,1 Millionen angewachsen.
a) Geben Sie die Wachstumsfunktion an!
b) Wie viel Prozent beträgt das jährliche Wachstum?
c) Wann wird das Land 9,76 Millionen Einwohner haben?
d) Wie viel Einwohner hat das Land in 20 Jahren?

Lösung:

a) Durch Einsetzen in die Wachstumsformel $N(t) = N_0 \cdot a^t$ ergibt sich:
$N_0 = 5$ (Millionen) $N(t) = 6{,}1$ (Millionen) $t = 10$ (Jahre)
$6{,}1 = 5 \cdot a^{10}$ $\quad | :5 \quad | \sqrt[10]{}$
$a = \sqrt[10]{\frac{6{,}1}{5}} = 1{,}02\ldots$
$N(t) = 5 \cdot 1{,}02^t$ (in Millionen)

b) a = 1,02 = 1+p/100 ➔ p =2% ➔ **Die Bevölkerung wächst pro Jahr um 2%.**

c) $N(t) = 9{,}76 = 6{,}1 \cdot 1{,}02^t \quad |:6{,}1$
$1{,}6 = 1{,}02^t$
jetzt muss man **logarithmieren** (Hochzahl herunterloggen)
$\log(1{,}6) = \log(1{,}02^t)$ nach den Logarithmengesetzen gilt: $\log(1{,}02^t) = t \cdot \log(1{,}02)$
$\log(1{,}6) = t \cdot \log(1{,}02)$
$t = \log(1{,}6) / \log(1{,}02) \approx 23{,}7 \Rightarrow$ **nach 23,7 Jahren**

d) $N(20) = 6{,}1 \cdot 1{,}02^{20}$ = **9,06 Millionen Einwohner**

Bei **radioaktiven Zerfallsprozessen** u. dgl. gibt man meist die Halbwertszeit τ an - die Zeit, nach der nur mehr die Hälfte der ursprünglichen Menge übrig ist.

Beispiel:
Die Halbwertszeit von radioaktivem Jod beträgt 8 Tage.
a) Geben Sie die Zerfallsfunktion an!
b) Wie viel Prozent der vorhandenen Menge zerfallen pro Tag?
c) Wann ist nur mehr 1% der ursprünglichen Menge vorhanden?

Lösung:

a) $N_0/2 = N_0 \cdot a^8$ $\quad$ $\mid: N_0$ $0{,}5 = a^8$ $\quad$ $\mid\sqrt[8]{\ }$ $a = \sqrt[8]{0{,}5} = 0.917$ $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot 0{,}917^t}$	b) $a = 0{,}917 = 1+p/100$ $p = 91{,}7\%$ ➔ **die Abnahme beträgt 8,3%.**	c) $1\% = 100\% \cdot 0{,}917^t$ $\quad$ $\mid:100\%$ $0{,}01 = 0{,}917^t$ Wieder muss man logarithmieren: $t = \log(0{,}01) / \log(0{,}917) \approx 53{,}2$ ➔ **nach 53,2 Tagen**

Übungen:

1) Ein Kapital wird mit a) 3% b) 5% c) 8% Zinsen angelegt. Berechne, in welcher Zeit sich das Kapital verdoppelt!
2) Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,5%. Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
   a) Wann wird das Land 15 Millionen Einwohner haben?
   b) Wann wird sich die Bevölkerung verdoppelt haben?
3) Petra beginnt zu joggen und verbraucht am Anfang 73 kJ/min an Energie. Nach und nach wird sie langsamer und verbraucht pro Minute um 0,5% weniger Energie als in der vorigen Minute.
   a) Erstellen Sie die Abnahmefunktion und berechnen Sie
   b) wie viel Energieverbrauch sie nach 30 Minuten hat
   c) wann sie nur mehr 60 kJ/min verbraucht
4) Die Abbaurate von Koffein ist bei Jasmin ca. 60% pro Stunde. Um 15:00 trinkt sie einen Kaffee mit 80 mg Koffein.
   a) Wie viel mg Koffein hat sie noch nach 5 Stunden?
   b) Wann hat sie nur mehr 1mg Koffein?

……..

5) Angenommen, die Weltbevölkerung vermehrt sich nach der Formel
   $N(t) = N_0 \cdot a^t$ 1960 gab es ca. 3 Mrd. Menschen, 1995 ca. 5,6 Mrd.
   a) Bestimmen Sie die Konstante a!
   b) Wie viel Prozent beträgt das jährliche Wachstum der Weltbevölkerung?
   c) Wann wird die Erde 15 Mrd. Einwohner haben?
6) Ein Bakterienstamm hat sich in 12 Stunden von 10000 auf 53500 Stück vermehrt.
   a) Zeigen Sie, dass die stündliche Vermehrungsrate ca. 15% beträgt!
   b) Wann werden die Bakterien auf 200 Millionen angewachsen sein?
7) Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7000 m³. Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9880 m³ angewachsen. Man darf annehmen, dass das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.
   a) Zeigen Sie, dass die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.
   b) Berechnen Sie die Zeitspanne, innerhalb der sich der Holzbestand verdoppelt bzw. verdreifacht.
8) Eine Tierpopulation hat sich in 5 Jahren von 200 auf 250 Tiere vergrößert. Angenommen, die Vermehrung erfolgt exponentiell.
   a) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Vermehrung?
   b) Wann hat sich die Population verdoppelt bzw. vervierfacht?

c*) In der Realität ist unbegrenztes Wachstum nicht möglich. Wenn die Zahl der Tiere nach oben begrenzt ist (Begrenztes Wachstum), lässt sich die Vermehrung besser durch folgende Gleichung beschreiben: $N(t) = G - (G-A) \cdot a^t$ (G ist die obere Grenze, A der Anfangswert) Angenommen, die Tierpopulation vermehrt sich nach dieser Formel, und sei G = 1000. Ermitteln Sie a und berechnen Sie, wann sich die Population verdoppelt hat!

……………………………………………………………………………………………………..

9) Der radioaktive Zerfall eines Elements lässt sich durch die Formel
$N(t) = N_0 \cdot a^t$ (oder $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{t/T}$)
beschreiben. Die Zeit T, in der von einer vorhandenen Stoffmenge die Hälfte zerfällt, heißt Halbwertszeit. Für Radium beträgt sie 1620 Jahre.

a) Berechnen Sie die Konstante a

b) Wie viel ist von dem ersten Gramm Radium, das Marie Curie 1898 herstellte, nach 100 Jahren noch übrig?

c) Wann wird nur mehr 0,1 g vorhanden sein?

10) Die Radiokarbonmethode kann bei Knochenfunden das Alter bestimmen. Das radioaktive C_{14} hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren.

a) Stellen Sie die Abnahmefunktion auf

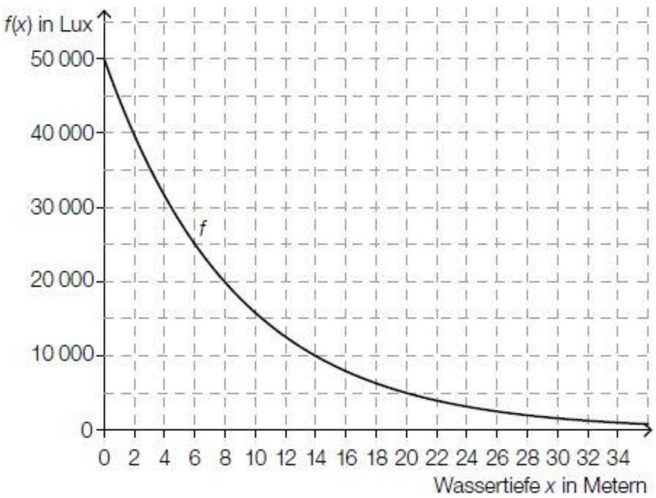
b) Berechnen Sie, wie viel % C_{14} nach 500 Jahren noch vorhanden sind

c) Berechnen Sie, wie alt die Knochen sind, wenn nur mehr 14% C_{14} vorhanden sind

11) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Element	**Halbwertszeit**	**Abnahme pro Zeiteinheit in %**	**Wann ist noch 1% übrig?**
a) Radium	1620 Jahre		
b) Caesium 137			nach 199 Jahren
c) Phosphor 32		4,73 % pro Jahr	
d) Jod 131	8 Tage		
e) Polonium 218		20 % pro Minute	

12) Maturaaufgabe: Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion *f* beschrieben werden. Der Graph von *f* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



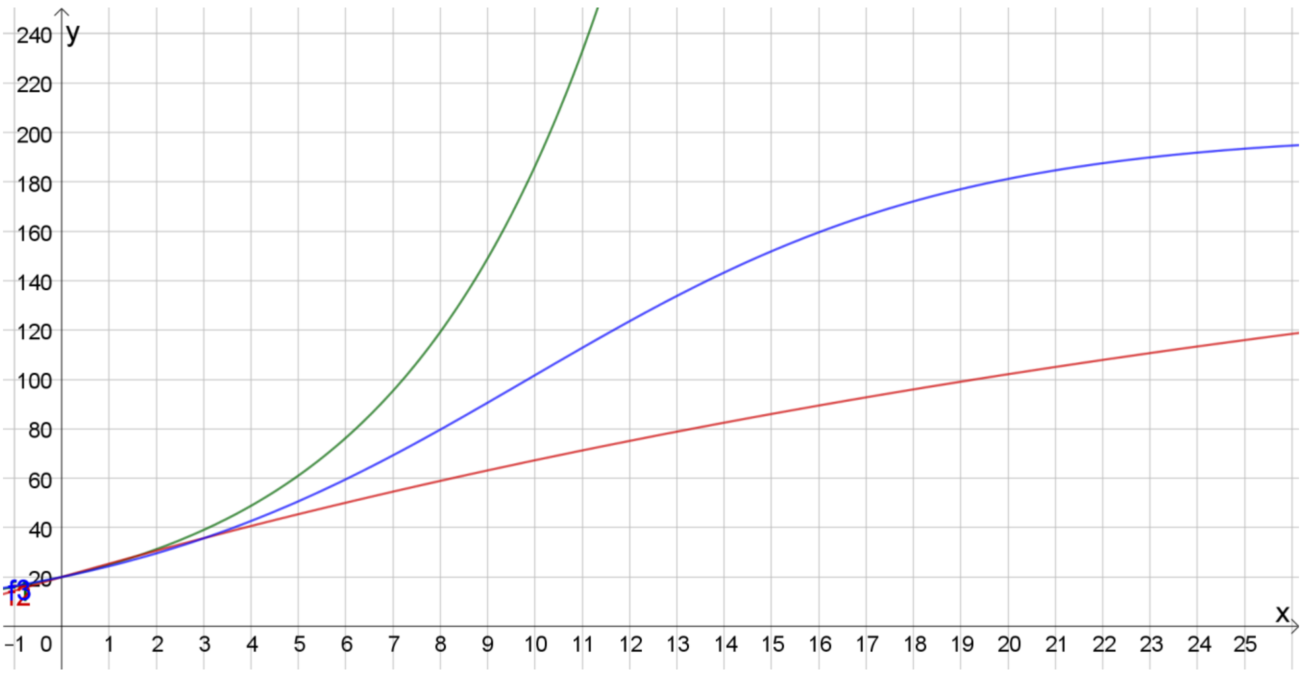
– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion *f*.

13) In einer Entenpopulation werden 20 Individuen gezählt. Im nächsten Jahr sind es bereits 25 Enten.

a) Erstellen Sie eine exponentielle Wachstumsfunktion für unbeschränktes Wachstum und ermitteln Sie die Anzahl an Enten nach 10 Jahren

b) Gehen Sie von beschränktem Wachstum nach der Formel $E(t) = 200-180 \cdot 0{,}97^t$ und berechnen Sie die Zahl der Enten nach 1 und nach 10 Jahren.

c) Gehen Sie von logistischem Wachstum mit der Formel $E(t) = \frac{200}{1+9*0{,}8^t}$ aus und berechnen Sie die Zahl der Enten nach 1 und nach 10 Jahren



Grafik der Wachstumsfunktionen: grün = exponentiell (a), rot = beschränkt (b), blau = logistisch (c)

Lösungen:

1. a) 24 J. (23,5) b) 15 J. (14,2) c) 9 J. (9,006)
2. a) in 15 J. b) in 46,5 J.
3. a) $N(t) = 73 \cdot 0{,}995^t$ b) 62,8 kJ c) nach 39 Minuten
4. $N(t) = 80 \cdot 0{,}4^t$ a) 0,8 mg b) nach 4,78 Stunden = 4 Stunden und 47 Minuten
5. a) a ≈ 1,01799 b) ≈ 1,8% c) ca. 2050
6. b) ≈ 71 Stunden
7. b) ≈ 20 Jahre bzw. ≈ 32 Jahre
8. $N(t) = 200 \cdot 1{,}0456^t$ a) 4,56% b) 15,5 Jahre bzw. 31 Jahre
   c) a = 0,987 nach 22,3 Jahren
9. a) a ≈ 0,999572 b) 0,956 g c) nach 5382 Jahren (im Jahr 7280)
10. a) $N(t) = 100\% \cdot 0{,}999879^t$ b) 94,13% c) nach 16253 Jahren
11.

a) Radium	1620 J.	0,043 %	nach 10763 J.
b) Caesium 137	30 J.	2,28 %	nach 199 J.
c) Phosphor 32	14,3 T.	4,73%	nach 95 T.
d) Jod 131	8 T.	8,3 %	nach 53 T.
e) Polonium 218	3,1 Min.	20 %	nach 20,6 Min.

12. a) in 20 m Wassertiefe b) $f(t) = 50\,000 \cdot 0{,}89125^t$
13. a) $N(t) = 20 \cdot 1{,}25^t$ b) $N(t) = 200 - 180 * 0.97^t$ c) $200 / (1 + 9 \cdot 0{,}8^t)$