

# Finanzmathematik – Übungen (Gurtner 2009)

## 1. Kapitalverzinsung bei der Bank mit linearen (einfachen) Zinsen während des Jahres

$$K_E = K_0 \cdot (1 + p/100 \cdot d/360) \quad \text{mit } d = \text{Tage}$$

- Ein Betrag von 3000 € wird bei einer einfachen Verzinsung von  $i = 4\%$  auf ein Sparbuch gelegt. Berechnen Sie die Höhe des Guthabens nach
  - 7 Monaten
  - 4,5 Monaten
  - 25 Tagen
  - 110 Tagen
- Ein Kredit von 20 000 € wird nach
  - einem Jahr
  - 7 Monaten
  - 168 Tagen einschließlich der Zinsen zurückgezahlt.Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag, wenn bei einfacher Verzinsung mit einem Zinssatz  $i = 6\%$  gerechnet wird?
- Zu welchem Jahreszinssatz muss ein Kapital von 1000 € angelegt sein, damit es in
  - 4 Monaten
  - 6 Monaten
  - 150 Tagen
  - 100 Tageneinfache Zinsen in der Höhe von 20 € erbringt?
- Ein Kapital von 3000 € wurde nach 5 Monaten in der Höhe von 3087,50 € zurückgezahlt. Welcher Zinssatz  $i$  wurde vereinbart?
- Ein Sparguthaben von 5000 € wird ab Jahresbeginn mit  $i = 3\%$  einfach verzinst. Von den Zinsen werden am Jahresende 25% als Kapitalertragssteuer (= KEST) an das Finanzamt abgeführt. Wie groß ist das Kapital am Jahresende inklusive den einfachen Zinsen ohne KEST?
- Mit einer Einlage von 1400 € wird am 18.2. ein Sparbuch eröffnet. Am 14.9. des gleichen Jahres wird das Sparbuch aufgelöst. Welches Guthaben kann nach Abzug der KEST behoben werden, wenn  $i = 1,75\%$ ?
- Ein Sparbuch wird am 4.5. mit einer Einlage von 800 € bei  $i = 2\%$  eröffnet.
  - Wie groß sind die Zinsen am Jahresende?
  - Am 18.10. erfolgt eine Abhebung von 300 €. Wie groß ist das Sparguthaben am Jahresende nach Abzug der KEST?
- Folgende Buchungen erfolgen auf einem Sparbuch:

23.1. Einlage (Eröffnung):	400 €
8.3. Einlage:	500 €
17.5. Abhebung:	600 €

Welches Guthaben steht am Jahresende nach Abzug der KEST bei  $i = 2\%$  zur Verfügung?

## 2. Kapitalverzinsung mehrjährig (theoretisch) mit exponentiellem Zinseszins

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p/100)^n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

- Berechnen Sie den Endwert  $K_n$  eines Kapitals für:
  - $K_0 = 12000$   $p = 4\%$   $n = 6$
  - $K_0 = 5400$   $p = 3,5\%$   $n = 12$
  - $K_0 = 2000$   $p = 3\%$   $n = 50$
  - $K_0 = 4000$   $p = 4,5\%$   $n = 4,5$
  - $K_0 = 5500$   $p = 6,5\%$   $n = 10 \frac{3}{4}$
  - $K_0 = 13000$   $p = 4,5\%$   $n = 8 \frac{200}{360}$

10. Berechnen Sie  $K_0$ , wenn:
- a)  $K_6 = 12000$   $p = 4\%$     b)  $K_{12} = 5400$   $p = 3,5\%$     c)  $K_n = 2000$   $p = 3\%$   $n=50$   
d)  $K_n = 4000$   $p = 4,5\%$   $n = 4\frac{3}{12}$     e)  $K_n = 5500$   $p = 6,5\%$   $n = 10\frac{2}{12}$
11. Bestimmen Sie den Zinssatz, wenn:
- a)  $K_0 = 12000$   $K_n = 16422,83$   $n = 8$     b)  $K_0 = 7500$   $K_5 = 10036,69$   
c)  $K_0 = 5611,04$   $K_{12} = 8000$     d)  $K_0 = 4000$   $K_5 = 4629,74$   $n = 4\frac{3}{12}$   
e)  $K_0 = 5500$   $K_n = 9100,88$   $n = 10$  Jahre 3 Monate 26 Tage
12. Berechnen Sie die Verzinsungsdauer für:
- a)  $K_0 = 4500$   $K_n = 6122,20$   $p = 8\%$     b)  $K_0 = 4000$   $K_n = 6500$   $p = 5,5\%$   
c)  $K_0 = 12\ 400$   $K_n = 21\ 028,93$   $p = 4,5\%$     d)  $K_0 = 8000$   $K_n = 10\ 000$   $p=5,5\%$   
e)  $K_0 = 28\ 765,67$   $K_n = 42\ 500$   $p = 5\%$     f)  $K_0 = 12\ 000$   $K_n = 13\ 000$   $p=11\%$
13. Welchen Betrag muss man heute anlegen, um bei 6% Zinseszins in 5 Jahren über 10 000 € zu verfügen?
14. In welchem Fall erreicht ein mit Zinseszins angelegtes Kapital einen höheren Wert wenn es 8 Jahre zu 5% oder 5 Jahre zu 8% verzinst wird? Wie müsste die Antwort bei einfachem Zins lauten? (vermuten – begründen – nachrechnen)
15. Beim Verkauf einer Wohnung werden 3 Angebote gemacht: A bietet 130 000 € in bar, B will in 5 Jahren 162 500 € zahlen, C bietet 50 000 € in bar und will in 10 Jahren weitere 125 000€ zahlen. Welches Angebot ist für den Verkäufer am günstigsten, wenn mit einer Verzinsung von 4,5% gerechnet wird? Wie sieht der Vergleich ohne Zinsen aus? (Barwertvergleich)
16. Bei der Versteigerung eines Gutes wurden folgende Angebote gemacht: A: 6 Millionen in bar; B: 2,5 Millionen in bar und 4 Millionen in 5 Jahren; C: 7 250 000.- in 4 Jahren. Welches Angebot ist bei 5% Zinseszinsen am höchsten? Wie sieht der Vergleich ohne Zinsen aus? (Barwertvergleich)
17. Eine Schuld von 60 000 €, die zu 6% Zinseszins verzinst wird, wird in drei Raten getilgt, die nach 4,8, und 12 Jahren fällig sind. Die erste Rate beträgt 25 000 €, die zweite beträgt 17 500 €. Wie hoch muss die dritte Rate sein? (Barwertvergleich)
18. Ein Kapital von 5000 € wird 5 Jahre lang mit 5,5%, danach 4 Jahre lang mit 5% und schließlich 3 Jahre mit 4,5% verzinst – auf welchen Betrag ist es zuletzt angewachsen? (Endwert)
19. Für eine Studienstiftung von 14 Millionen € wurde bestimmt, dass nach Ablauf von 12 Jahren die jährlichen einfachen Zinsen als Begabtenstipendium zur Verfügung gestellt werden sollen. Welcher Betrag steht in jedem Jahr zur Verfügung (ewige Rente), wenn das Geld zu 5% Jahreszins angelegt ist? Wie viele StudentInnen können damit jährlich unterstützt werden, wenn ein Student 800 € bekommen soll?
20. Die Jahreszinsen einer Stiftung von 500 000 €, die zu 8,5% angelegt sind, sollen als Stipendien an ausländische Studenten ausbezahlt werden, wenn die Stiftungssumme auf 750 000 € angewachsen ist. Nach wie viel Jahren ist dies der Fall?

### 3. Ganzjährige Rentenrechnung

$$\mathbf{B_v} = \frac{R}{(1+i)^{n-1}} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \quad \mathbf{B_n} = \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \quad \mathbf{E_v} = R \cdot q \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \quad \mathbf{E_n} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

21. Berechne die Endwerte der folgenden Renten bei einer jährlichen Verzinsung von  $i = 6\%$ :
- 600 € am Ende jedes Jahres, Laufzeit 8 Jahre
  - 450 € am Beginn jedes Jahres, Laufzeit 10 Jahre
  - 100 € am Beginn jedes Quartals, Laufzeit 5 Jahre
  - 70 € am Ende jedes Monats, Laufzeit 5 Jahre
22. Berechne die Barwerte der folgenden Renten bei einer jährlichen Verzinsung von  $i = 4\%$ :
- 1200 € am Beginn jedes Jahres, Laufzeit 6 Jahre
  - 800 € am Ende jedes Jahres, Laufzeit 9 Jahre
  - 60 € am Beginn jedes Monats, Laufzeit 4 Jahre
  - 500 € am Ende jedes Semesters, Laufzeit 10 Jahre
23. Frau A. will in 10 Jahren 12000 € ansparen. Wie viel muss sie am Ende jedes Jahres einzahlen? ( $i = 5\%$ )
24. Herr B. hat 15000 € gewonnen und will davon 5 nachschüssige Jahresraten beziehen. Wie hoch ist eine Rate? ( $i = 6\%$ )
25. Frau V. hat bereits 6500 € gespart. Sie zahlt am Ende jedes Jahres weitere 500 € ein. Wie groß ist ihr Guthaben nach 8 Jahren? ( $i = 3\%$ )
26. Welchen Endwert erhält man, wenn man durch 3 Jahre hindurch am Jahresbeginn 3000 € auf ein Bankkonto legt, das mit 4,5% verzinst wird? Rechne Sie mit und ohne Rentenformel.
27. Bei der Geburt ihres Sohnes vereinbaren die Eltern, am Beginn jedes Jahres 500 € auf ein Sparkonto zu legen, das mit 4,5% verzinst wird. Das Geld soll der Sohn am 18. Geburtstag bekommen. Wie groß ist diese Summe?
28. Ein Landwirt verkauft seinen Hof gegen eine Rente von 3600 € über 25 Jahre. Der neue Besitzer möchte die Rente sofort in bar auszahlen. Welcher Betrag (Barwert) ist dazu erforderlich, wenn mit 5% Zinseszinsen gerechnet wird?
29. Eine Versandfirma bietet an: „Statt heute 3400 € in bar zu erlegen, können Sie auch 5 nachschüssige Jahresraten mit 800 € zahlen.“ Ist dieses Angebot günstig? Berechnen Sie den Barwert der Rente, wenn 5% Zinseszins angenommen wird.
30. Eine vorschüssige Rente von 5400 € hat bei 4% Verzinsung einen Endwert von 127 980 €. Wie lange wird die Rente ausbezahlt?
31. Wie groß kann eine Rente sein, wenn 100 000 € auf ein Konto mit 5% Zinsen gelegt wird und durch 20 Jahre lang jährlich nachschüssig (= am Ende des Jahres) ausbezahlt werden soll? (Wie groß wäre sie ohne Zinsen?)
32. Wie viel kann Herr Peter jährlich für 7 Jahre hindurch als Studienunterstützung für die Tochter Anke von einem Sparbuch mit 34.000€ zu 4% Zinsen abheben?

#### 4. Unterjährige Kapitalverzinsung

$$K_n = K_0 \cdot (1+j/m)^{m \cdot n}$$

$$K_n = K_0 \cdot (1+i_m)^{m \cdot n}$$

Der äquivalente Zinsfaktor  $1+i$  erhält folgende Buchstaben als Namen und den Wert:

- bei ganzjähriger Verzinsung:  $1+i$
- bei halbjähriger Verzinsung:  $1+i_2 = \sqrt[2]{1+i}$
- bei vierteljähriger Verzinsung:  $1+i_4 = \sqrt[4]{1+i}$
- bei monatlicher Verzinsung:  $1+i_{12} = \sqrt[12]{1+i}$

33. Auf welchen Wert wächst ein Kapital  $K_0 = 5000$  €, das auf einen nominellen Jahreszinssatz von  $j = 6\%$  ein Jahr lang angelegt ist
- bei jährlicher Verzinsung
  - bei halbjähriger Verzinsung
  - bei vierteljähriger Verzinsung
  - bei monatlicher Verzinsung
34. Auf welchen Wert wächst ein Kapital  $K_0 = 5000$
- bei jährlicher Verzinsung mit  $i = 4\%$  p.a.
  - bei halbjähriger Verzinsung mit  $i_2 = 2\%$  p.s.
  - bei vierteljähriger Verzinsung mit  $i_4 = 1\%$  p.q.
  - bei monatlicher Verzinsung mit  $i_{12} = 1/3\%$  p.m.
35. Bestimme
- den zu  $i_1 = 8\%$  (p.a.) äquivalenten Zinssatz  $i_2$  (p.s.)
  - den zu  $i_{12} = 0,004$  (p.m.) äquivalenten Jahreszinssatz  $i$  (p.a.)

#### 5. Unterjährige Rentenrechnung

$$B_v = \frac{R}{A^{n-1}} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} \quad B_n = \frac{R}{A^n} \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} \quad E_v = R \cdot q \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} \quad E_n = R \cdot \frac{A^n - 1}{A - 1} \quad \text{mit } A = 1+i_m = \sqrt[m]{1+i}$$

36. Berechne den Endwert folgender Rente:
- $R = 8000$  vierteljährlich nachschüssig bei  $i_4 = 2\%$  durch 15 Jahre
  - $R = 500$  monatlich vorschüssig durch 6 Jahre bei  $i = 4\%$  p.a.
  - $R = 1500$  pro Quartal nachschüssig durch 12 Jahre bei  $i_2 = 1,5\%$
  - $R = 600$  monatlich vorschüssig durch 8 Jahre bei  $i_{12} = 0,3\%$
37. Berechne den Barwert folgender Rente:
- $R = 8000$  halbjährlich vorschüssig bei  $i_2 = 5\%$  durch 15 Jahre
  - $R = 500$  monatlich vorschüssig durch 6 Jahre bei  $i = 4\%$  p.a.
38. Auf welchen Betrag wächst ein **Guthaben** bei  $d = 3,5\%$  p.a. in 6 Jahren an, wenn monatlich vorschüssig 100 € eingelegt werden?  
(Hinweis: Wandle  $d$  in den äquivalenten dekursiven Zinssatz  $i_{12}$  um!)
39. Am Ende eines jeden Halbjahres werden durch 8 Jahre 4000 € bei  $i_1 = 6\%$  auf ein Konto gelegt. Welche monatliche vorschüssige Rente kann man dafür vom 10. bis einschließlich 12. Jahr bekommen?

40. Bestimme den **Barwert** einer mit  $i = 8\%$  p.a. verzinster, vierteljährlich vorschüssig zu zahlenden Rente von  $R = 1000$  bei 26-jähriger Laufzeit.
41. Bestimme den **Endwert** einer nachschüssigen Rente mit monatlichen Raten von 250 € durch 7 Jahre bei halbjährlicher Verzinsung mit  $i_2 = 3\%$  p.s.!
42. Ein Kredit von 6000 € mit einer Laufzeit von 5 Jahren soll in vorschüssigen Monatsraten zurückgezahlt werden ( $i = 8\%$ ). Berechne die Höhe der Raten.
43. Herr M. zahlt 6 Jahre lang am Ende jedes Quartals 250 € ein ( $i = 7,5\%$ ). Wie hoch ist der Kontostand 4 Jahre nach der letzten Rate?

## 6. Rentenumwandlungen

44. Jemand verzichtet auf eine vorschüssige (= jährlich am Beginn ausbezahlt) Rente von 2000 € durch 10 Jahre zugunsten eines Kinderheims. Das Kinderheim möchte die Rente in eine einmalige Zahlung 4 Jahre nach Fälligkeit der ersten Rente verwandeln. Welcher Betrag wird ausbezahlt, wenn mit 4,5% Zinseszinsen gerechnet wird? (Endwert + Rückzinsung)
45. Wenn jemand auf eine vorschüssige Rente von 1500 € durch 10 Jahre bei 5% verzichtet, welchen Betrag kann er dafür ersatzweise am Ende des 5. Jahres beanspruchen? (**Endwert + Rückzinsung**)
46. Jemand zahlt durch 10 Jahre hindurch nachschüssig (= am Ende des Jahres) 2000 € bei einer Versicherungsanstalt ein und möchte dafür vom Beginn des 15. Jahres bis zum Beginn des 20. Jahres eine entsprechende Rente ausbezahlt bekommen. Wie groß ist diese bei 6% Zinseszinsen?
47. Mister X möchte eine nachschüssige Zusatzrente von 2500 € 12 Jahre hindurch bekommen und ist dafür bereit 10 Jahre hindurch einen entsprechenden Betrag einzuzahlen. Wie groß muss dieser Betrag sein, wenn mit 5% Zinsen gerechnet wird und die erste Rente 4 Jahre nach der letzten Einzahlung ausbezahlt wird?
48. Ein durch 20 Jahre hindurch bei 5% eingezahlter jährlicher Betrag von 400 € soll 3 Jahre nach der letzten Einzahlung in jährlichen Raten von 3000 € ausbezahlt werden. Wie lange kann diese Rate ausbezahlt werden? Schätzen Sie die Dauer und machen Sie eine Tabelle der Auszahlung (Jahr | Restbetrag | + Zinsen | – Auszahlung)
49. Jemand zahlt durch 10 Jahre lang nachschüssig 1200 € jährlich bei einer Versicherungsanstalt ein und möchte dafür vom Beginn des 15. Jahres an bis zum Beginn des 20. Jahres (einschließlich) eine entsprechende jährliche **Rente** ausbezahlt bekommen. Wie hoch wird eine Rentenrate bei  $i = 6\%$  p.a. sein?
50. Statt einer im 4. Jahr beginnenden vorschüssigen Rente von 5000 € durch 6 Jahre möchte jemand eine sofort beginnende nachschüssige Rente durch 12 Jahre. Wie viel wird er bei  $i = 4\%$  bekommen?
51. Jemand möchte eine vorschüssige Rente mit  $R = 2000$ ;  $n = 10$ ;  $i = 0,05$  p.a. in eine nachschüssige Rente gleicher Dauer umwandeln. Wie hoch sind die Rentenraten?

52. Herr Kaspar will eine nachschüssige Rente mit  $R = 12\,000$ ;  $n = 15$ ;  $i = 4,5\%$  p.a. in eine vorschüssige, im dritten Jahr beginnende (und im 15. Jahr endende) Rente umwandeln. Berechne die Höhe der Raten dieser vorschüssigen Rente!
53. Herr Gerber will einen Kredit von  $200\,000\text{ €}$  bei  $8\%$ iger Verzinsung p.a. jährlich in 8 Jahren durch gleich bleibende vorschüssige Raten (=Jahresannuitäten) tilgen. Wie hoch sind die Rückzahlungsraten?
54. a) Welcher Betrag ist am Beginn jedes Jahres einzuzahlen, um bei einer Veranlagung mit  $6\%$  nach 16 Jahren über  $10\,000\text{ €}$  zu verfügen?  
 b) Nach 6 Jahren verringert die Bank den Zinssatz auf  $2\%$  p.a. Wie hoch sind die Beträge, die unter dieser Bedingung vom Beginn des 7. Jahres an zu entrichten sind?
55. Beim Kauf eines Hauses wurde festgelegt, dass Frau Putz als Käuferin 12 Jahre lang jeweils am Ende eines Quartals  $32\,000\text{ €}$  zu zahlen hat. Nachdem Frau Putz dies 5 Jahre lang hindurch gemacht hat, sollen die noch ausstehenden Zahlungen durch einen in weiteren 2 Jahren einmaligen Betrag abgegolten werden. Wie hoch ist dieser, wenn man mit einer Verzinsung von  $2\%$  p.q. (pro Quartal) rechnet?
56. Herr J. zahlt 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres  $1000\text{ €}$  ein, danach 5 Jahre lang je  $1500\text{ €}$  und 8 Jahre lang je  $2000\text{ €}$  ( $i = 4\%$ ). Berechne  
 a) den Barwert aller Zahlungen  
 b) das Guthaben 3 Jahre nach der letzten Zahlung!
57. Frau P. ist verpflichtet, 10 vorschüssige Jahresraten zu  $700\text{ €}$  zu bezahlen. Sie will stattdessen zwei Jahre nach Fälligkeit der ersten Rate einen einmaligen Betrag zahlen. Wie hoch ist dieser, wenn man eine Verzinsung von  $i = 5\%$  annimmt?
58. Sie möchten von Ihrem 63. Geburtstag an 20 Jahre eine monatliche nachschüssige Rente von  $2.000\text{ €}$  ausgezahlt bekommen. Welchen Betrag müssen Sie dafür 30 Jahre lang bis zu Ihrem 63. Geburtstag vierteljährlich vorschüssig einzahlen? Sowohl in der Anspar- als auch in der Auszahlungszeit werde das Konto mit  $5,5\%$  p.a. verzinst. Welche **ewige** nachschüssige monatliche **Rente** könnten Sie bei diesen Einzahlungen erhalten?
59. Das Vermögen von A ist mit  $100.000\text{ €}$  doppelt so hoch wie das Kapital von B. A spart jährlich  $4.000\text{ €}$  nachschüssig, während B  $8.000\text{ €}$  spart. Die jährliche Verzinsung ist  $6\%$ .  
 a) Nach wie viel Jahren sind die Vermögen von A und B gleich?  
 b) Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?
60. Eine Schuld von  $2.400\text{ €}$  wird in 13 Monatsraten zu je  $200\text{ €}$  abgetragen. Wie hoch ist der Zinsfuß bei a) nachschüssiger b) vorschüssiger Zahlungsweise und monatlicher Verzinsung?
61. Herr J. zahlt 15 Jahre lang am Ende jedes Monats  $100\text{ €}$  ein. Er will von dem ersparten Geld 12 nachschüssige Jahresraten beziehen. Wie hoch ist eine Rate? ( $i = 5,5\%$ )
62. Frau E. will 25 Jahre lang am Beginn jedes Monats einen bestimmten Betrag einzahlen, damit sie danach 18 Jahre lang eine vorschüssige Quartalsrente von  $1000\text{ €}$  beziehen kann. Wie hoch müssen die Einzahlungen sein? ( $i = 3\%$ )

63. Herr K. zahlt 15 Jahre lang am Ende jedes Jahres 900 € ein ( $i = 5\%$ ). Von dem ersparten Geld will er, beginnend 8 Jahre nach der letzten Einzahlung, 20 vorschüssige Jahresraten abheben.
- Wie hoch ist eine Rate?
  - Wie viele Raten kann er stattdessen abheben, wenn eine Jahresrate 3000 € betragen soll? (Der Restbetrag wird gleichzeitig mit der letzten Rate ausbezahlt.)
64. Herr J. zahlt 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1000 € ein, danach 5 Jahre lang je 1500 € und 8 Jahre lang je 2000 € ( $i = 4\%$ ). Berechne
- den Barwert aller Zahlungen
  - das Guthaben 3 Jahre nach der letzten Zahlung!

## **7. Kreditabbrüche und Umwandlungen**

65. Frau P. ist verpflichtet, 10 vorschüssige Jahresraten zu 700 € zu bezahlen. Sie will stattdessen zwei Jahre nach Fälligkeit der ersten Rate einen einmaligen Betrag zahlen. Wie hoch ist dieser, wenn man eine Verzinsung von  $i = 5\%$  annimmt?
66. Eine Schuld von 8000 € soll in nachschüssigen Jahresraten zu 1200 € getilgt werden ( $i = 7,5\%$ ).
- Wie hoch ist die Restschuld nach 5 Jahren?
  - Wie viele Vollraten müssen gezahlt werden, und wie groß ist der Restbetrag ein Jahr nach der letzten Vollrate?
67. Ein Kredit von 10000 € wird durch nachschüssige Quartalsraten getilgt ( $i = 6\%$ ). Der Schuldner zahlt 6 Jahre lang je 250 €, danach 2 Jahre lang je 200 €. Welcher Betrag ist danach noch ausständig?
68. Jemand nimmt einen Kredit von 8000 € zum Zinssatz von 8% auf. Er soll durch 60 vorschüssige Monatsraten, beginnend nach einem Jahr, zurückgezahlt werden.
- Wie hoch ist eine Rate?
  - Nachdem 2 Jahre lang Raten gezahlt wurden, wird die Laufzeit des Kredits um ein Jahr verlängert. Wie hoch ist die neue Rate?
69. Frau H. hat vor, 12 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1200 € zu sparen. Sie erhält 5% Zinsen.
- Wie hoch wird ihr Guthaben am Ende sein?
  - Nach der 5. Rate beschließt sie, ihr Sparziel schon 2 Jahre früher zu erreichen. Wie hoch sind die neuen Raten?
70. Herr F. hat schon 8000 € gespart. Er zahlt 4 Jahre lang am Beginn jedes Halbjahres 300 € ein. Danach setzt er ein Jahr mit den Zahlungen aus, und schließlich zahlt er 2 Jahre lang 360 € pro Halbjahr ein. Wie hoch ist danach sein Guthaben? ( $i = 6\%$ )
71. Herr C. will in 8 Jahren 10000 € ansparen. Er erhält 6% Zinsen.
- Welche nachschüssigen Quartalsraten muss er zahlen?
  - Nach 3 Jahren wird der Zinssatz auf 5% gesenkt. Welcher Betrag wird ihm am Ende auf 10000 € fehlen, wenn er die Raten in der bisherigen Höhe weiterzahlt?
  - Wie hoch müssen die neuen Raten sein, damit er sein Sparziel erreicht?

72. Frau Z. hat einen Kredit aufgenommen, den sie - bei einem Quartalszinssatz von  $i_4 = 1,5\%$  - in 40 nachschüssigen Quartalsraten von 500 € zurückzahlen muss. Nach 3 Jahren wird der Zinssatz auf  $i_4 = 2\%$  erhöht.
- Um wie viel verlängert sich die Laufzeit des Kredits, wenn Frau Z. die Raten in der bisherigen Höhe weiterzahlt?
  - Wie hoch ist die Teilrate, die ein Quartal nach der letzten Vollrate gezahlt wird?

### **8. Investitionsrechnung**

73. Die Unternehmensführung der „Austrotrans“ erwägt die Anschaffung eines Kleintransporters. Der erforderliche Kapitaleinsatz beträgt 27 000 € und die voraussichtliche Nutzungsdauer 6 Jahre. Betriebswirtschaftliche Überlegungen führen zu folgender Schätzung der Einnahmen und Ausgaben innerhalb der Nutzungsdauer:

Perioden (Jahre)	Einnahmen	Ausgaben	Quasirenten (EIN-AUS)	Bar-Wert heute ?
1	14 000	13 000	1 000	
2	14 000	12 000	2 000	
3	16 000	11 000	5 000	
4	16 000	10 000	6 000	
5	18 000	9 000	9 000	
6	20 000	8 000	12 000	
<b>Summe</b>	<b>98 000</b>	<b>63 000</b>	<b>35 000</b>	
minus Kapitaleinsatz =			8 000	

„Austrotrans“ ist an einer Gewinnsteigerung interessiert. Erscheint die geplante Investition anhand der vorliegenden Informationen sinnvoll? Nimm den Zinssatz 8% an und berechne den Wert der Quasirenten heute und ziehe von der Summe den Kapitaleinsatz ab!

74. Wie Aufgabe 73), jedoch mit umgekehrter zeitlicher Reihenfolge, d.h. die Quasirente soll im ersten Jahr 12 000 € betragen, dann 9000 € , usw. Was ändert sich, wenn man keine Zinseszinsen berücksichtigt oder 8% Zinseszinsen?
75. Eine zusätzliche Säge mit einem Anschaffungswert von 84 000 € würde einem Sägewerk bei einer voraussichtlichen Nutzungsdauer von 12 Jahren jährliche Quasirenten von ca. 13 000 € einbringen. Welche Entscheidung wird anhand der Kapitalwertmethode nahegelegt, wenn man mit einem kalkulatorischen Zinssatz von
- $i = 7\%$  p.a.
  - $i = 14\%$  p.a.
- gerechnet wird?
76. Eine Unternehmung steht vor dem Problem, sich zwischen zwei Investitionsobjekten mit gleicher voraussichtlicher Nutzungsdauer (5 Jahre) zu entscheiden. Beide Objekte erfordern einen Kapitaleinsatz von ca. 500 000 €, das eine Investitionsobjekt lässt jährliche Quasirenten von 150 000 € erwarten, beim anderen Investitionsobjekt rechnet man mit Quasirenten von 150 000 €, 140 000 €, 130 000 €, 135 000 € und 200 000 € für das erste bis fünfte Jahr. Für welches Objekt soll man sich bei
- $i = 10\%$  p.a.
  - $i = 5\%$  p.a.
  - 0% entscheiden?

## 9. Diskont und antizipativer Zinssatz

77. Berechne den zu a)  $d = 3\%$  b)  $d = 5\%$  c)  $d = 10\%$  p.a. äquivalenten dekursiven **Zinssatz**

78. Ermittle den zu a)  $i = 3\%$  b)  $i = 5\%$  c)  $i = 10\%$  äquivalenten antizipativen **Zinssatz**

79. Auf welches **Endkapital** wachsen

- a.  $K_0 = 120\ 000$  bei  $d = 5\%$  p.a. in 6 Jahren?
- b.  $K_0 = 120\ 000$  bei  $i = 5\%$  p.a. in 6 Jahren?
- c.  $K_0 = 75\ 000$  bei  $d = 3,5\%$  p.a. in 4 Jahren?
- d.  $K_0 = 75\ 000$  bei  $i = 3,5\%$  p.a. in 4 Jahren?
- e.  $K_0 = 150\ 000$  bei  $d = 0,5\%$  p.a. in 2 Jahren und 3 Monaten? (rechne mit  $i_{12}$ )
- f.  $K_0 = 150\ 000$  bei  $i = 0,5\%$  p.a. in 2 Jahren und 3 Monaten? (rechne mit  $i_{12}$ )
- g.  $K_0 = 60\ 000$  bei  $d = 2,5\%$  p.a. in  $5\frac{1}{2}$  Jahren? (rechne mit  $i_2$ )
- h.  $K_0 = 60\ 000$  bei  $i = 2,5\%$  p.a. in  $5\frac{1}{2}$  Jahren? (rechne mit  $i_2$ )

80. Ein **Wechsel** über 80 000 € soll 4 Monate vor seiner Fälligkeit diskontiert werden. Wie groß ist der Diskonterlös heute (ohne Berücksichtigung von Provisionen und Spesen) bei  $d = 9\%$  p.a.?

81. Welchen Betrag (ohne Provisionen und Spesen) erhält man heute für einen in 36 Monaten fälligen **Wechsel** über 20 000, der mit  $d = 9\%$  p.a. diskontiert wird?

**Lösungen:**

- 1) a) 3070                      b) 3045                      c) 3008,33                      d) 3036,67  
 2) a) 21 200    b) 20 700                      c) 20 560  
 3) a) 6%                      b) 4%                      c) 4,8%                      d) 7,2%  
 4) 7%  
 5) 5112,50  
 6) 1410,46  
 7) a) 10,49                      b) 506,95  
 8) 306,10

Nr.	a)	b)	c)	d)	e)	f)
9)	15 183,83	8159,77	8767,81	4876,22	10823,58	18944,97
10)	9483,77	3573,63	456,21	3317,54	2899,40	
11)	4%	6%	3%	3,5%	5%	
12)	4 Jahre	9 Jahre 24 Tage	12 Jahre	4 Jahre 2 Monate	8 Jahre	9 Monate 6 Tage

- 13) 7472,58 €  
 14) 8 Jahre ergibt mehr Zinseszinsen (1477,46 statt 1469,33 bei 1000 € Anfangskapital) – bei einfachen Zinsen gäbe es keinen Unterschied. (40% : 1400 €)  
 15) Angebot C (130 491 €) > Angebot B(130 389 €) > Angebot A(130 000 €)  
 ohne Zinsen: C(175 000) > B(162 500) > A(130 000)  
 16) Angebot A (6 Mill.) > Angebot C (5,96 Mill.) > Angebot B (5,6 Mill.)  
 17) 58 792,24 € - fast die ursprüngliche Schuld  
 18) 9064,39 €  
 19) 1 257 099,43 € 1571 StudentInnen  
 20) nach 5 Jahren  
 21) a) 5938,48    b) 6287,24    c) 2338,78    d) 4864,01  
 22) a) 6542,19    b) 5948,27    c) 2669,81    d) 8191,21  
 23) 954,05  
 24) 3560,95  
 25) 12680,17  
 26) 9834,57 €  
 27) 14031,78 €  
 28) 50738,20 €  
 29) 3463,58 €, relativ günstig zu Vergleichsangeboten, aber teurer als in bar - wenn mit 5% gerechnet wird  
 30) 17 Jahre  
 31) 8024,26 € (5000 €)  
 32) 5664,73 €  
 33) 5300    5304,50                      5306,82                      5308,38  
 34) 5200    5202                      5203,02                      5203,71  
 35) 3,92%    4,91%  
 36) 912 412,32                      40 654,97                      86 221,49                      66 836,39  
 37) 129 128,59    32 130,22  
 38) 8039,36  
 39) E = 80 350,14                      B = 85 171,15                      R = 2572,42  
 40) 45 381,11  
 41) 25 948,01  
 42) 120,09  
 43) 9942,15  
 44) 19 721,37 €

- 45) 15 521,79 €  
 46) 6384,99 €  
 47) 1521,80 €

Jahr	Restbetrag	+ Zinsen	- Auszahlung
0	14582,09	729,10	3000,00
1	12311,19	615,56	3000,00
2	9926,75	496,34	3000,00
3	7423,09	371,15	3000,00
4	4794,25	239,71	3000,00
5	2033,96	101,70	2135,66
6	0,00		

- 48)  
 49)  $E = 15\ 817,95$   $B = 19\ 968,53$   $R = 3831,00$   
 50)  $B_1 = 27\ 259,11$   $B_2 = 24\ 233,25$   $R = 2582,11$   
 51)  $B = 16\ 215,64$   $R = 2100$   
 52)  $B = 128\ 874,55$   $B = 140\ 734,23$   $R = 13\ 908,49$   
 53)  $R = 32\ 225$   
 54) a) 367,47 b)  $E_6 = 2717,01 (*1,02^{10} = 3312,02)$   $E = 6687,98$   $R = 598,81$   
 55) 797 900,88  
 56) 19 037,23 43 381,44  
 57) 6257,21  
 58)  $B = 295\ 283,81 = E$   $R = 985,48$   $R_{\text{ewig}} = 1320,42$   
 59)  $E + K = 231\ 807,95$   $R = 10\ 793,40$   
 60) 1,65% p.m. = 21,73% p.a. 1,37% p.m. = 17,74 % p.a.  
 61) 3197,96  
 62) 126,05  
 63) a) 2192,78 b) 12 Raten  
 64) a) 19037,23 b) 43381,44  
 65) 6257,21  
 66) a) 4514,97 b) 9 Raten, 711,75  
 67) 6242,18  
 68) a) 172,92 b) 134,55  
 69) a) 19100,55 b) 1925,18  
 70) 16844,80  
 71) a) 247,10 b) 331,89 c) 261,84  
 72) a) um 2,6 Quartale b) 305,09  
 73) 5885,65  
 74) + 8000 + 2256,64  
 75) 19 254,92 10 416,20  
 76) a) 68 618 / 66 128 □ A b) 149 422 / 149 910 □ B c) 250 000 / 255 000 □ B  
 77) 3,09% 5,26% 11,11%  
 78) 2,91% 4,76% 9,09%  
 79) a) 163 244,90 b) 160 811,48 c) 86 487,23 d) 86 064,22  
 e) 151 701,31 f) 151 692,78 g) 68 964,54 h) 68 727,81  
 80) exakt: 77 600 theoretisch: 77 524,17  
 81) 15 071,42