

Arbeitsaufgaben Differenzialrechnung: Weg–Geschwindigkeit–Steilheit

- A) Eine Kugel wird von der Dachkante eines 140 m hohen Gebäudes mit der Abschussgeschwindigkeit 60 m/s lotrecht nach oben geschossen. Nach t Sekunden hat sie die Höhe $s(t) = 140 + 60t - 5t^2$ erreicht (s in Meter, t in Sekunden).
- 1) Nach welcher Zeit befindet sich die Kugel wieder auf Abschusshöhe?
 - 2) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit der Kugel in den ersten 5 s?
 - 3) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel nach 5 s?
 - 4) Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit trifft die Kugel auf dem Boden auf?
- B) Ein Körper bewegt sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion s mit $s(t) = 0,5 \cdot t^2 + 1$.
- 1) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers zum Zeitpunkt $t = 3$?
 - 2) Zu welchem Zeitpunkt t hat der Körper die Geschwindigkeit $v(t) = 4$?
 - 3) Nimmt die Geschwindigkeit des Körpers mit der Zeit zu?
 - 4) Von welchem Typ ist die Funktion $v: t \rightarrow v(t)$?
- C) Die Höhe eines lotrecht nach oben geworfenen Steins zum Zeitpunkt t ist ungefähr gegeben durch $h(t) = v_0 t - 5t^2$, wobei v_0 die Abschussgeschwindigkeit ist (t in Sekunden, $h(t)$ in Meter, v_0 in m/s). Berechne für $v_0 = 34$ m/s
- 1) die mittlere Geschwindigkeit des Steins während der ersten zwei Sekunden,
 - 2) die Geschwindigkeit des Steins zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, 3, 4, 5 (s)!
- Was bedeutet eine negative Geschwindigkeit?
- D) Für den Strömungswiderstand $F(v)$ eines mit der Geschwindigkeit v fliegenden Flugzeugs gilt ungefähr: $F(v) = 2,3 \cdot v^2$ ($F(v)$ in Newton, v in km/h). Berechne die Änderungsrate des Strömungswiderstands bezüglich der Geschwindigkeit bei der Geschwindigkeit 200, 400, 600, 800 km/h! Nimmt diese Änderungsrate mit steigender Geschwindigkeit zu oder ab?
- E) Wird ein Körper mit der Abschussgeschwindigkeit v_0 (in m/s) vom Boden lotrecht nach oben geschossen, so ist seine Höhe (in Meter) nach t Sekunden ungefähr gegeben durch: $s(t) = v_0 \cdot t - 5 \cdot t^2$. Es sei $v_0 = 65$ (m/s).
- 1) Nach welcher Zeit schlägt der Körper wieder auf dem Boden auf?
 - 2) Wie schnell ist der Körper in 25 m Höhe beim Aufsteigen bzw. Absteigen?
 - 3) Nach welcher Zeit erreicht der Körper seine größte Höhe? Wie groß ist diese Höhe?
- F) Wenn ein Auto gegen eine Mauer fährt, hängt die Wucht des Aufpralls von der kinetischen Energie des Autos ab. Beschleunigt das Auto gleichmäßig, so wächst seine kinetische Energie mit dem Quadrat der Zeit. Für die kinetische Energie eines Autos zum Zeitpunkt t gelte: $E(t) = 5000 \cdot t^2$ (t in Sekunden, $E(t)$ in Joule).
- 1) Berechne die Zunahme der kinetischen Energie in den Zeitintervallen $[0; 5]$ und $[5; 10]$! In welchen dieser beiden Zeitintervalle ist die Zunahme größer?
 - 2) Berechne die mittlere Zunahme der kinetischen Energie in den unter 1) angegebenen Zeitintervallen! In welchem der beiden Zeitintervalle nimmt die Energie im Mittel stärker zu?
 - 3) Gib eine Formel für die Zunahmegeschwindigkeit $E'(t)$ der kinetischen Energie zum Zeitpunkt t an! Zu welchem Zeitpunkt $t \in [0; 10]$ nimmt $E(t)$ am schnellsten zu?
 - 4) Wie groß ist die Zunahmegeschwindigkeit der kinetischen Energie zu Beginn, nach 5 s bzw. nach 10 s?
- G) Das durchhängende Seil einer Materialseilbahn sei ungefähr durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{50}(x - 10)^2 + 100$ (mit $0 \leq x \leq 50$) beschrieben. Ist das Seil an der Stelle 20 oder an der Stelle 30 steiler? Überprüfe das Ergebnis anhand einer Skizze!

Lösungen:

- A) 1) nach 12s 2) 35 m/s 3) 10 m/s 4) nach 14 s mit $v = -80$ m/s
- B) 1) $v(3) = 3$ 2) $t = 4$ 3) ja 4) vom Typ $f(x) = k \cdot x$
- C) 1) 24 m/s
2) 34 m/s; 24 m/s; 14 m/s; 4 m/s; -6 m/s; -16 m/s
Negative Geschwindigkeit bedeutet Abnahme der Höhe mit zunehmender Zeit.
- D) $F'(200) = 920 \frac{\text{N}}{\text{km/h}}$; $F'(400) = 1840 \frac{\text{N}}{\text{km/h}}$; $F'(600) = 2760 \frac{\text{N}}{\text{km/h}}$; $F'(800) = 3680 \frac{\text{N}}{\text{km/h}}$
Die Änderungsrate nimmt mit steigender Geschwindigkeit zu.
- E) 1) nach 13 s 2) ca. 61,0 m/s bzw. ca. -61,0 m/s 3) nach 6,5s; 211,25 m
- F) 1) [0; 5]: 125 000 Joule; [5; 10]: 375 000 Joule
Im Zeitintervall [5; 10] ist die Zunahme größer.
2) [0; 5]: 25 000 (Joule/s); [5; 10]: 75 000 (Joule/s)
Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Energie im Mittel stärker zu.
3) $E'(t) = 10\,000t$
Zum Zeitpunkt $t = 10$ nimmt $E(t)$ am schnellsten zu.
4) $E'(0) = 0$ (J/s); $E'(5) = 50\,000$ (J/s); $E'(10) = 100\,000$ (J/s)
- G) Das Seil ist an der Stelle 30 steiler als an der Stelle 20.