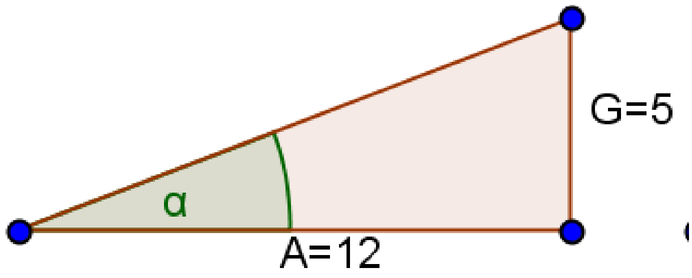
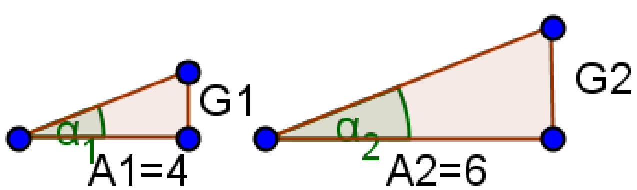
Trigonometrie von Anfang an

Aufgabe: Sabine hat ein rechtwinkeliges Plastikdreieck entdeckt, das die Kathetenlängen 5 cm und 12 cm hat. Sie will sich kleinere Dreiecke mit dem gleichen Seitenverhältnis machen, wobei die Ankathetenlängen einmal 4 cm und einmal 6 cm sein sollen. Wie kann sie die Länge der Gegenkatheten mit einer passenden Formel ausrechnen?





Lösung:

- Es gilt der Strahlensatz auf Grund ähnlicher Dreiecke:
  Gegenkathete : Ankathete = 5:12
  daher sind die neuen Gegenkatheten auf folgende Art zu berechnen:
  G1: 4 = 5:12 ➔ G1 = $\frac{5}{12} \cdot 4$ ➔ ....➔ G2 = $\frac{5}{12} \cdot 6$

IDEE der WINKELFUNKTIONEN:

Da kann man auf die Idee kommen, jedem Seitenverhältnis ($\frac{5}{12}$) den entsprechenden Winkel zuzuordnen (α = 23°)
jedem Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ wird der Name TANGES gegeben mit der Abkürzung TAN.

TAN(α) = $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$

Umgekehrt kann jedem Seitenverhältnis der zugehörige Winkel α durch die Umkehrfunktion ARCUSTANGENS, oder kurz TAN^{-1} zugeordnet werden:

α = TAN^{-1} ($\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$)

Analog gilt das für SINUS: **SIN(α) =** $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$ α = SIN^{-1} ($\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$)

und COSINUS: **COS(α) =** $\frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$ α = COS^{-1} ($\frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$)

Beispiele:

A) Der Winkel α = 10° ist gegeben. Gesucht wird das Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ und wenn die Länge der Ankathete = 30 cm ist, wie lange ist dann die Gegenkathete?

Lösung: Das Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ heißt Tangens, also bekomme ich mit der Eingabe tan(10) den Wert des Seitenverhältnisses: tan(10) = 0,176 [Vorsicht: MODE muss auf DEGREE eingestellt sein!]
Dann kann man aber auch ansetzen: Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ = tan(10) = **0,176** und die Gleichung umformen:
Gegenkathete = Ankathete · 0,176 = 30 · 0,176 = **5,3 cm**

B) Das Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ = $\frac{4}{5}$ = 0,8 gegeben. Wie groß ist der zugehörige Winkel β?

Lösung: Das Seitenverhältnis $\frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$ = tan(β) = 0,8, also bekomme ich mit der Umkehrfunktion $\tan^{-1}(0{,}8)$ = 38,66° den zugehörigen Winkel

Übungen:

1) Von einem rechtwinkeligem Dreieck kennt man den Winkel α = 35° und die Hypotenusenlänge H. Berechne die Länge G der Gegenkathete von α und die Länge A der Ankathete von α! Kontrolliere durch eine Zeichnung!

a) H = 9 b) H = 12 c) H = 23,5 d) H = 950

2) Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit α = 65° kennt man die Länge G der Gegenkathete bzw. die Länge A der Ankathete von α. Berechne die Länge der Hypotenuse

a) G = 16 b) A = 13 c) G = 85 d) A = 105

3) Von einem rechtwinkeligen Dreieck sind zwei der drei Seiten bekannt (A=Ankathete von α, G=Gegenkathete α, H=Hypotenuse). Berechne den Winkel α mit der jeweils richtigen trigonometrischen Umkehrfunktion.

a) H=30, G=25 b) G=66, A=44 c) H=144, A=22 d) H=104, G=38
e) A=6, G=13 f) H=22, A=20 g) H=158, G=44 h) G=2, A=10

4) Ein Wagen wird längs einer unter 20° ansteigenden Rampe nach oben geschoben. Welche horizontale bzw. vertikale Entfernung hat der Wagen zurückgelegt, nachdem er

a) 2,5 m b) 4m c) 7m d) 12m geschoben wurde

Lösungen:

1a) G = 9·sin(35) = 5,16 A = 9·cos(35) = 7,37
b) G = 6,88 A = 9,83
c) G = 13,48 A = 19,25
d) G = 545 A = 778
2a) H = 16/sin(65) = 17,65
b) H = 30,76
c) H = 93,8
d) H = 248
3a) $\alpha = \sin^{-1}(25/30) = 56{,}44°$
b) $\alpha = \tan^{-1}(66/44) = 56{,}31°$
c) $\alpha = \cos^{-1}(22/144) = 81{,}21°$
d) α = 21,43°
e) α = 65,22°
f) α = 24,62°
g) α = 16,17°
h) α = 11,31°
4a) horizontal = 2,5·cos(20) = 2,35 m vertikal = 2,5·sin(20) = 0,86 m
b) horizontal = 3,76 m vertikal = 1,37 m
c) horizontal = 6,58 m vertikal = 2,39 m
d) horizontal = 11,28 m vertikal = 4,10 m