➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Wahrscheinlichkeit

Sicher hat jeder schon einmal die Aussage mit „wahrscheinlich“ getätigt, wie etwa:

„Wahrscheinlich komme ich zu spät“
„Wahrscheinlich sehe ich dich jetzt öfter“

Weniger oft kommt jemand und sagt:

„Die Wahrscheinlichkeit für einen 6er-Zwilling auf einen Wurf ist beim Würfel-Poker 16%“

Damit hat aber die Geschichte der Wahrscheinlichkeit angefangen. Mit dem **Glücksspiel**. Und mit dem Abbruch eines Glücksspiels, bei dem man nicht wusste, wie man das eingesetzte Geld verteilen soll, da ja keiner wirklich gewonnen hat.

Daraus ist die **Wahrscheinlichkeitstheorie** entstanden. Die gehört zur Schulmathematik. Sie besteht aus 4 Kapiteln:

1. BAUM-Diagramme + URNEN
2. Binomialverteilung
3. Normalverteilung
4. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Welche Fragen kann man bei diesen Kapiteln beantworten?

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Lotto-6er (bei 6 aus 45) ?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein Losungswort aus 3 Buchstaben richtig zu erraten?
3. Wie viel Prozent der Leute haben einen IQ größer als 130 und sind damit Genies? (wenn der mittlere IQ $\mu=100$ und die mittlere Abweichung $\sigma=15$ ist)
4. Eine Wohltätigkeits-Lotterie legt 20 000 Lose auf, wovon 1000 gewinnen. Ein Wohltäter kauft 200 Lose.
   Wie groß ist der Erwartungswert für die gewonnenen Lose? und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mehr als 15 Gewinnlose dabei zu haben?

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Kapitel 1: Baumdiagramme

Um herauszufinden, was Zufall ist, lies bitte die Definition bei wikipedia durch:
http://de.wikipedia.org/wiki/Zufall - Was_ist_Zufall.3F
Dann wäre auch noch interessant, was ein Zufallsexperiment sein soll. Lies bitte hier:
http://de.wikipedia.org/wiki/Zufall#Beispiel_eines_Zufallsexperimentes
Denn damit können wir selber ein **Zufallsexperiment** ausführen:

A) Einfacher Münzwurf:

- Dazu brauchen wir nur eine Münze, die wir mit dem Finger hoch schnippen (- nicht so einfach !) und auf die Hand klatschen. Na – ist Symbol oder Zahl erschienen?
- oder wir machen es mit dem **Taschenrechner** (der kann das auch!) [**TI-30X II** B/S]

indem wir die Taste **PRB** und zweimal ← ← wählen, dann erschein **RAND** in der Anzeige.
Mit = ist es fixiert und dann noch *2 =
Wenn wir jetzt mehrmals = drücken, dann entsteht eine Zufallsfolge, die 0 oder 1 als Stelle vor dem Komma hat. 0 soll Symbol sein, 1 Zahl ➔ **das ist ein Münzwurf**

- dritte Möglichkeit ist das Programm EXCEL: **Münzwurf**

Aufgabe: Bitte erstelle eine Zufallsfolge von 10 Münzwürfen und überprüfe, ob genau 5mal Zahl kommt oder weniger oft oder öfter
(geht am einfachsten mit Excel: **mehrfacher Münzwurf**)

B) Urnenversuch (a´la "6 aus 45")

- Dazu brauchen wir eine Schale (Urne) mit 3 roten, 2 gelben und 5 grünen Kugeln (Ampelfarben). Dann schließen wir die Augen, rühren im Gefäß um und wählen eine Kugel aus – das ist dann die momentane Ampelfarbe
- Oder wir machen das in EXCEL: **URNENVERSUCH**

Aufgabe: Bitte mache den Urnenversuch mit 3 roten, 2 gelben und 5 grünen Kugeln mit 3 Zügen und das 5mal (=5 Partien). Wie oft kommt eine Partie ohne grüne Kugel vor? Wie oft kommt eine Partie ohne gelbe Kugel vor?
Könnte man das wahrscheinlichste Ergebnis berechnen?

Theorie zu den Baumdiagrammen:
Bitte lies das Skriptum zur Wahrscheinlichkeit durch:
Seite 106-107: Laplace-Definition der Wahrscheinlichkeit:
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf

Aufgabe 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln einen 6er zu werfen?
(P = günstig: möglich = ? : ?)
Die Lösung ist hier

Aufgabe 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen, wenn in der Urne 3 rote, 2 gelbe und 5 grüne Kugeln vorhanden sind?
Die Lösung ist hier

Damit haben wir schon genug Vorwissen, um uns auf die Wahrscheinlichkeitsberechnung von **URNEN-Beispielen** zu stürzen:

➔ Skriptum S.132-137 http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf
➔ http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch1.htm + Übung
➔ http://members.chello.at/manfred.gurtner/math/TH_UE_Urnen_Kombinatorik_Gurtner_SS14.pdf

LINK zu einem **SUPER-LERNPFAD**:
http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/index.htm

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Kapitel 2: Binomialverteilung

Thema dieses Kapitels ist der **wiederholte Münzwurf mit einer unsymmetrischen Münze**, oder anders formuliert: **Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen**.
Das lässt sich mit Baumdiagrammen auch gut nachvollziehen, nur wird es bei vielen Münzwürfen zu schwierig zu einer Wahrscheinlichkeit zu kommen, deshalb wollen wir uns jetzt um die Formel für dieses Ereignis bemühen:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k q^{n-k}$$

Hier bedeutet:

P ist die **Wahrscheinlichkeit bei allen n Münzwürfen** k positive Würfe "KOPF" zu bekommen (englisch: permiability, daher kommt der Buchstabe P)

X ist das gesuchte **Ereignis "KOPF"**

k ist die Anzahl der positiven Ausgänge der Münzwürfe (= **Anzahl von "KOPF"**)

n ist die **Anzahl der Münzwürfe**

p ist die **Wahrscheinlichkeit für "KOPF" bei einem einzelnen Münzwurf**

q = 1–p ist die **Gegenwahrscheinlichkeit zu p**, also die Wahrscheinlichkeit für "ZAHL" bei einem einzelnen Münzwurf

$\binom{n}{k}$	ist der Binomialkoeffizient, den man am schnellsten mit beim **Taschenrechner TI-30X II** erreicht.	n $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{nCr}}$ k

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Zur ERKLÄRUNG des Binomialkoeffizienten geht es weiter mit der Anzahlbestimmung, der

Kombinatorik

Wie groß ist die Anzahl der Möglichkeiten für die Reihenfolge der Gewinner eines Spiels, wenn es drei Spieler und drei Plätze gibt?

Die Antwort ist verblüffenderweise "3!" .

Was bedeutet "3!" ? Ausgesprochen wird es wie: "3 Faktorielle" oder "3 Fakultät" – und bedeuten soll es: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ die Zahlen von drei an fallend bis 1 miteinander multipliziert. Lies doch sicherheitshalber noch einmal auf Seite 108+109 vom Skriptum weiter:
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf

Jetzt können wir berechnen, wie viele Möglichkeiten es für 4 Personen gibt auf 4 Plätzen eines Autos zu sitzen (wenn alle den Führerschein haben) – nämlich 4! (im Taschenrechner TI-30 II ist es mit $\boxed{4}$ $\boxed{\text{PRB}}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ zu erreichen und ergibt **24 Möglichkeiten**)

der Name für diese Anzahlberechnung heißt **PERMUTATIONEN**: Also hieße der Satz von vorhin:

Wie viele Permutationen von 4 Personen auf 4 Plätze gibt es ?
Antwort: 4! = 4 Faktorielle = 24 Möglichkeiten

Weiter geht es im Skriptum: **Permutationen mit Wiederholung von einzelnen Elementen**. Bitte nachlesen auf Seite 109-110:
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf

Übung:
Wie viele Möglichkeiten gibt es die Buchstaben AABBB in (sinnlose) Wörter zu verwandeln?
Lösung: Ich werde alle Möglichkeiten aufschreiben:
AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBABA, BBBAA
- und das sind 10 Möglichkeiten. Da kann man sich leicht beim Aufschreiben irren. Aber dazu gibt es die Formel: $\frac{n!}{k_1!k_2!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Aufgabe 3: Wie viele Möglichkeiten gibt es für Wörter mit den Buchstaben AAAB ?
(mit Aufschreiben aller Möglichkeiten und Verwenden der Formel!)
Die Lösung ist hier

Damit kann man nun das Problem lösen, wie groß die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln ist, **bei drei Würfen genau einen Sechser zu werfen**:

Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

Zuerst "6", dann zweimal "nicht 6", das ergibt die Wahrscheinlichkeit:	P(6-n6-n6) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216} = 11{,}57\%$
Zuerst " nicht 6", dann "6" und "nicht 6", das ergibt die Wahrscheinlichkeit:	P(6-n6-n6) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216} = 11{,}57\%$
Zuerst zweimal "nicht 6", dann "6", das ergibt die Wahrscheinlichkeit:	P(6-n6-n6) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} = 11{,}57\%$
damit ergibt sich in Summe aller Möglichkeiten:	P(genau einmal 6) = 11,57*3 = **34,72%**

Formal könnte man schreiben: P(genau einmal 6) = $\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$ wobei der Bruch am Anfang die Anzahl der Möglichkeiten angibt, die Zahl "6" und zweimal "n6" in verschiedenen Reihenfolgen anzuordnen (Permutation mit Wiederholung).

Dieser Koeffizient hat auch noch eine andere Bedeutung, er gibt auch die Anzahl der **Kombinationen** an – das heißt, die Anzahl der Möglichkeiten, eine Gruppe von k Personen aus einer Menge von n Personen auszuwählen, wobei die Reihenfolge in der Gruppe egal ist:

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ ist der **Binomialkoeffizient** für die Anzahl der Kombinationen und wird

mit PRB → nCr beim **Taschenrechner TI-30X II** erreicht, z.B. $\binom{3}{1}$ wird wie folgt eingetippt: 3 PRB → 1 = und ergibt 3 als Resultat
LINK zum Berechnen des Binomialkoeffizienten:
http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/binomialvert.php

Der **Binomialkoeffizient** wird auch genau definiert in:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/binom.htm
und er kommt auch noch im **Pascal'schen Dreieck** vor:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/pascaldr.htm
und es gibt ein **Galton-Brett**, mit dem man die Binomialverteilung durch Statistik annähern kann: http://www.learn-line.nrw.de/angebote/eda/medio/galton/galton.exe
oder ein **Applet** zur Binomialverteilung:
http://www.uni-konstanz.de/FuF/wiwi/heiler/os/vt-bin.html

➔ weiter im Skriptum Binomialverteilung: Seite 145-147 Definition+Übung
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf

danach zu den **Übungen**:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch2_ueb.htm Binomialaufgaben
http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/divvert.htm Vermixte Aufgaben
http://www.mathe-online.at/nml/materialien/SkriptumBlaha/KAP-15.pdf vermixt ab S. 153

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

3. Normalverteilung

Einführung und Darstellung der Normalverteilung als Glockenkurve mit Wahrscheinlichkeitsflächen + einfache Übungen (ohne Tabelle):
http://ilias.vhs21.ac.at/2bw/mathe/themen/Stoch/TH_UE_Normalverteilung_Gurtner_SS04.doc

Theorie der Normalverteilung:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch3.htm

und Übungen (mit Tabelle):
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch3_ueb.htm

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

4. Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

grafisch und rechnerisch:
http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/approx_bin_norm.php
Theorie dazu:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch3.htm
und Übungen:
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch4_ueb.htm

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

5. Abschlusstest = Lernzielüberprüfung

Sie haben für die Beispiele 1 ½ Stunden Zeit, dürfen Taschenrechner und Formelsammlung verwenden.

1) In einer Urne sind 5 schwarze, 4 weiße und 3 rote Kugeln Es wird dreimal **ohne Zurücklegen** gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, a) eine rote und eine schwarze und eine weiße Kugel in dieser Reihenfolge b) zwei schwarze Kugeln und eine rote Kugel in beliebiger Reihenfolge c) mindestens eine rote Kugel zu ziehen?	1/2/2 Punkte
2) Peter bietet Karl folgendes Spiel an. Eine ideale Münze wird 9 mal geworfen. Peter gewinnt, wenn Kopf mit der Häufigkeit 4 oder 5 auftritt, sonst gewinnt Karl. Wie groß ist jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeit von Peter bzw. Karl? Ist das Spiel fair?	4 Punkte
3) Das Geburtsgewicht von Neugeborenen nach unauffälliger Schwangerschaft sei mit Erwartungswert $\mu = 3500$ g und Standardabweichung $\sigma = 500$ g normalverteilt. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes aus dieser Grundgesamtheit mehr als 4250 g wiegt? b) In welchem Intervall um den Mittelwert liegt das Gewicht von 96 % aller Neugeborenen?	2/3 Punkte
4) Bei einem Glücksrad beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 500 Versuchen a) mindestens 80 Gewinne b) zwischen (einschließlich) 80 und 120 Gewinne zu erhalten?	3/3 Punkte

Notenschlüssel: ***VIEL ERFOLG ! ! !***

10–13 Punkte ....Genügend 14-16 Punkte …Befriedigend 17-18 Punkte …Gut 19-20 Punkte …Sehr Gut

Klicken Sie **hier**, um zu den Lösungen der Lernzielüberprüfung zu gelangen.

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Lösungen:

Lösung 1: 1/6 = 16,7%

Lösung 2: 3/10 = 30%

Lösung 3: AAAB, AABA, ABAA, BAAA $\frac{n!}{k_1!k_2!} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = \frac{(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(1)} = \frac{4}{1} = 4$

➔ Einleitung – Bäume – Binomialverteilung – Kombinatorik – Binomialkoeffizient – Normalverteilung – Approximation –TEST

Lösung der Lernzielüberprüfung:

1) a) URNEN: P(rsw) = $\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} =$ **4,5%** b) P(ssr<>)= $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} * 3 =$ **13,6%**

c) P(keine rote) = $\frac{9}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} =$ 38,1% P(mind. 1 rote) = 100–38,2 = **61,8%**

2) Binomialverteilung: n=9, p=0,5 P(X=4) + P(X=5) = 0,492
Peter gewinnt mit **49,2%, fast fair**

3) a) Normalverteilung: P(G>4250) = $\Phi(\frac{4250-3500}{500}) \approx$ **7%**
b) [2500; 4500]

4) a) p=0,2 n=500 k>=80 ➔ Approximation: μ = 100, σ = 8,9 (>3)
➔ P(X>=80) = $1-\Phi(\frac{80-100}{8{,}9}) = 1-\Phi(-2{,}25) =$ **98,78%**

b) P(80<X<120) = $\Phi(\frac{120-100}{8{,}9}) - \Phi(\frac{80-100}{8{,}9}) = \Phi(2{,}25) - \Phi(-2{,}25) =$ **97,56%**

Ende des Lernpfades „Wahrscheinlichkeitsrechnung“.
http://www.vhs21.ac.at/2.bw/workroom/Inhalte/mathematik.htm führt zurück auf die Lernpfad-Übersicht-Seite.